ГИА-9

Под редакцией Ф.Ф. Лысенко,
С.Ю. Кулабухова

ГИА-9

МАТЕМАТИКА

ПОСОБИЕ ДЛЯ «ЧАЙНИКОВ»

МОДУЛЬ 1: АЛГЕБРА

БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ ГИА-2014

9 класс

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС
«МАТЕМАТИКА. ПОДГОТОВКА К ГИА»

ЛЕГИОН

Учебные пособия издательства «Легион» допущены к использованию в образовательном процессе приказом Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009

Учебно-методический комплекс
«Математика. Подготовка к ГИА-9»

Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова

МАТЕМАТИКА

БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ ГИА-2014. ПОСОБИЕ ДЛЯ «ЧАЙНИКОВ». Модуль 1: Алгебра

ТМ

ЛЕГИОН
Ростов-на-Дону
2013

ББК 22.1

М 34

Рецензент:

Евич Л. Н. — кандидат физико-математических наук, доцент

Авторский коллектив:

Иванов С. О., Ольховая Л. С., Резникова Н. М., Нужа Г. Л.

М 34 **Математика. Базовый уровень ГИА-2014. Пособие для «чайников». Модуль 1: Алгебра** / Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион, 2013. — 144 с. — (ГИА-9)

ISBN 978-5-9966-0437-1

Материал, представленный в этой книге, предназначен для **формирования устойчивых навыков в решении задач базового уровня сложности** на ГИА-9 по математике. Воспользовавшись пособием, можно развить навыки безошибочного решения заданий первой части предстоящего экзамена и сэкономить время для решения более сложных задач.

Пособие состоит из пяти глав, каждая из которых включает в себя необходимую теоретическую информацию, разбор решений типовых задач, а также варианты для самостоятельного решения. Кроме того, в пособии приведено **10 обобщающих тренировочных тестов**, включающих задания по всем темам экзамена, рассмотренным в книге.

Предлагаемое издание адресовано учащимся 9-х классов общеобразовательных учреждений и учителям математики.

Книга является частью учебно-методического комплекса **«Математика. Подготовка к ГИА»**, включающего такие книги как «Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА-2014», «Математика. Базовый уровень ГИА-2014.Пособие для «чайников». Модуль 2: Геометрия», «Математика. Базовый уровень. ГИА-2014. Пособие для «чайников». Модуль 3: Реальная математика» «Математика. 9 класс. Тематические тесты для подготовки к ГИА-2014» и др.

ББК 22.1

ISBN 978-5-9966-0437-1

Оглавление

2. Зак. № 181

От авторов

Книга «Математика. Базовый уровень ГИА-2014. Пособие для „чайников“. Модуль 1: Алгебра» входит в учебно-методический комплекс «Математика. Подготовка к ГИА», выпускаемый издательством «Легион». Пособие предназначено для подготовки девятиклассников к ГИА (государственной итоговой аттестации) и будет полезно в течение всего учебного года. Оно адресовано учащимся 9-х классов общеобразовательных учреждений и учителям математики.

Материал, представленный в этой книге, служит для формирования **устойчивых навыков в решении задач базового уровня**. Воспользовавшись этой книгой, школьник научится безошибочно выполнять наиболее простые задания экзамена по математике и экономить время для решения более сложных задач.

Пособие состоит из пяти глав, каждая из которых включает в себя

- краткий теоретический минимум;
- разбор решений типовых задач, подобные которым предстоит выполнять учащимся на экзамене;
- варианты для самостоятельного решения.

Каждый вариант для самостоятельного решения в главах 1 – 3 (числа и вычисления, алгебраические выражения, уравнения и неравенства) рассчитан на выполнение в течение 45 минут, в главах 4 и 5 (числовые последовательности, графики и функции) — в течение 15 минут.

Книгу завершают **10 обобщающих тренировочных тестов**, включающих задания по всем главам книги. Каждый тест рекомендуем выполнять в течение 60 – 70 минут, а затем проверить правильность решения с помощью ответов, приведённых в конце пособия. Если ответы не совпадут, следует ещё раз попытаться решить задачу, а при необходимости найти подобную среди разобранных примеров.

Настоящее пособие составлено в соответствии со спецификацией и демонстрационным вариантом[1] ГИА 2013 года. Согласно спецификации, на рассмотренные в данной книге темы приходится 8 заданий первой части модуля «Алгебра» экзаменационной работы.

Темы, не вошедшие в данное пособие, будут представлены в книгах «Математика. Базовый уровень ГИА-2014. Пособие для „чайников". Модуль 2: Геометрия» и «Математика. Базовый уровень ГИА-2014. Пособие для „чайников". Модуль 3: Реальная математика».

Обсудить пособия издательства «Легион», оставить свои замечания и предложения можно на официальном форуме издательства `http://forum.legionr.ru`

Комплекс «Математика. Подготовка к ГИА»

Перечислим книги, входящие в комплекс «Математика. Подготовка к ГИА», выпускаемый издательством «Легион»:

- Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА-2014.

  Основная книга для подготовки к ГИА, включающая необходимый теоретический минимум, сборник авторских тестов, составленных по последней спецификации ГИА, а также сборник задач.

- Решебник. Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА-2014.

  Решебник содержит решения всех тестовых заданий повы-

[1] Находятся на сайте Федерального института педагогических измерений `http://www.fipi.ru`

шенного уровня сложности и всех задач из раздела «Задачник» пособия «Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА-2014».

- Математика. 9 класс. Тематические тесты для подготовки к ГИА-2014. Алгебра, геометрия, теория вероятностей и статистика.
  Сборник тестов, каждый из которых предназначен для проверки уровня усвоения определённого раздела программы по математике. Сборник охватывает все темы, отражённые в спецификации ГИА.
- Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА-2014. Учебно-тренировочные тесты.
  Сборник авторских тестов, составленных по последней спецификации ГИА. Дополняет книгу «Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА-2014».
- Математика. 9 класс. Тренажёр по новому плану ГИА. Алгебра, геометрия, реальная математика.
- Математика. Базовый уровень ГИА-2014. Пособие для «чайников». Модуль 1: Алгебра.
- Математика. Базовый уровень ГИА-2014. Пособие для «чайников». Модуль 2: Геометрия.
- Математика. Базовый уровень ГИА-2014. Пособие для «чайников». Модуль 3: Реальная математика.

Желаем успехов на экзамене!

Глава 1. Числа и вычисления

Сложение и вычитание чисел

Немного полезной информации

При **сложении (вычитании) натуральных чисел** столбиком надо

- подписать одно число под другим так, чтобы единицы были под единицами, десятки — под десятками, сотни — под сотнями и т.д.;
- сложить (вычесть) числа поразрядно, начиная с разряда единиц.

Задачи с решениями

1. Выполните действие: а) $346 + 458$; б) $2463 - 378$.

Решение.

а) $\begin{array}{r} 346 \\ +\ 458 \\ \hline 804 \end{array}$ б) $\begin{array}{r} 2463 \\ -\ 378 \\ \hline 2085 \end{array}$

Ответ: а) 804; б) 2085.

Немного полезной информации

При **сложении (вычитании) десятичных дробей** надо

- уравнять в этих дробях количество знаков после запятой;
- записать числа друг под другом так, чтобы запятая была под запятой;
- выполнить сложение (вычитание), не обращая внимания на запятую;
- поставить в ответе запятую под запятой в данных дробях.

Задачи с решениями

2. Выполните действие: а) $13{,}28 + 5{,}145$; б) $3{,}6 - 1{,}551$.

Решение.

а) $$\begin{array}{r} 13{,}280 \\ +\ \ 5{,}145 \\ \hline 18{,}425 \end{array}$$ б) $$\begin{array}{r} 3{,}600 \\ -\ 1{,}551 \\ \hline 2{,}049 \end{array}$$

Ответ: а) 18,425; б) 2,049.

3. Выполните действие: а) $24{,}2 + 0{,}867$; б) $448{,}32 - 51{,}435$; в) $451 - 2{,}553$.

Решение.

а) $$\begin{array}{r} 24{,}200 \\ +\ \ 0{,}867 \\ \hline 25{,}067 \end{array}$$ б) $$\begin{array}{r} 448{,}320 \\ -\ \ 51{,}435 \\ \hline 396{,}885 \end{array}$$ в) $$\begin{array}{r} 451{,}000 \\ -\ \ \ 2{,}553 \\ \hline 448{,}447 \end{array}$$

Ответ: а) 25,067; б) 396,885; в) 448,447.

Немного полезной информации

При **сложении (вычитании) обыкновенных дробей** надо

- привести дроби к наименьшему общему знаменателю;
- сложить (вычесть) числители, результат записать в числитель;
- в знаменатель записать найденный наименьший общий знаменатель.

Задачи с решениями

4. Выполните действие: а) $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}$; б) $\frac{11}{30}-\frac{7}{20}$.

Решение.

а) Приведём дроби $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{5}$ к наименьшему общему знаменателю. Для этого умножим числители и знаменатели этих дробей на дополнительные множители 5 и 3 соответственно:

$$\frac{2^{\backslash 5}}{3}+\frac{3^{\backslash 3}}{5}=\frac{10}{15}+\frac{9}{15}=\frac{10+9}{15}=\frac{19}{15}=1\frac{4}{15}.$$

б) Приведём дроби $\frac{11}{30}$ и $\frac{7}{20}$ к наименьшему общему знаменателю. Для этого умножим числители и знаменатели этих дробей на дополнительные множители 2 и 3 соответственно:

$$\frac{11^{\backslash 2}}{30}-\frac{7^{\backslash 3}}{20}=\frac{22}{60}-\frac{21}{60}=\frac{22-21}{60}=\frac{1}{60}.$$

Ответ: а) $1\frac{4}{15}$; б) $\frac{1}{60}$.

5. Выполните действие $\frac{13}{18}+\frac{11}{24}$.

Решение.

Для приведения исходных дробей к наименьшему общему знаменателю найдём НОК (наименьшее общее кратное) чисел 18 и 24. Разложим 18 и 24 на простые множители:

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Отсюда НОК(24; 18) $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 72$.

$$\frac{13^{\backslash 4}}{18} + \frac{11^{\backslash 3}}{24} = \frac{13 \cdot 4}{72} + \frac{11 \cdot 3}{72} = \frac{52 + 33}{72} = \frac{85}{72} = 1\frac{13}{72}.$$

Ответ: $1\frac{13}{72}$.

6. Выполните действия $\left(\frac{7}{15} + \frac{1}{4}\right) - \frac{2}{15}$.

Решение.

Для упрощения вычислений поменяем местами $\frac{1}{4}$ и $\left(-\frac{2}{15}\right)$:

$$\left(\frac{7}{15} + \frac{1}{4}\right) - \frac{2}{15} = \left(\frac{7}{15} - \frac{2}{15}\right) + \frac{1}{4} = \frac{5}{15} + \frac{1}{4} = \frac{1^{\backslash 4}}{3} + \frac{1^{\backslash 3}}{4} =$$

$$= \frac{4 + 3}{12} = \frac{7}{12}.$$

Ответ: $\frac{7}{12}$.

7. Выполните действие $5\frac{8}{9} - 2\frac{1}{6}$.

$$5\frac{8^{\backslash 2}}{9} - 2\frac{1^{\backslash 3}}{6} = 5\frac{16}{18} - 2\frac{3}{18} = 3\frac{13}{18}.$$

Ответ: $3\frac{13}{18}$.

Немного полезной информации

Модуль числа a:

$|a| = a$, если $a \geqslant 0$,

$|a| = -a$, если $a < 0$.

Например: $|10| = 10$; $|0| = 0$; $|-1{,}5| = 1{,}5$.

Задачи с решениями

8. Вычислите: а) $|-7| + |-4|$; б) $|12| - |-3|$.

Решение.

а) $|-7| + |-4| = 7 + 4 = 11$;

б) $|12| - |-3| = 12 - 3 = 9$.

Ответ: а) 11; б) 9.

Немного полезной информации

При **сложении отрицательных чисел** надо

- поставить перед полученным числом знак минус;
- сложить их модули.

Задачи с решениями

9. Выполните сложение: а) $-10 + (-13)$;

б) $-2\frac{1}{5} + \left(-3\frac{1}{15}\right)$; в) $-0{,}75 + (-1{,}25)$.

Решение.

а) $-10 + (-13) = -(10 + 13) = -23$.

б) $-2\frac{1}{5} + \left(-3\frac{1}{15}\right) = -\left(2\frac{1}{5} + 3\frac{1}{15}\right) = -\left(2\frac{3}{15} + 3\frac{1}{15}\right) = -5\frac{4}{15}$.

в) $-0{,}75 + (-1{,}25) = -(0{,}75 + 1{,}25) = -2$.

Ответ: а) -23; б) $-5\frac{4}{15}$; в) -2.

Немного полезной информации

При **сложении чисел с разными знаками** надо

- поставить перед полученным числом знак того слагаемого, модуль которого больше;
- из большего модуля слагаемых вычесть меньший.

Задачи с решениями

10. Выполните сложение: а) $28 + (-14)$; б) $-2\frac{2}{7} + 4\frac{5}{7}$; в) $2{,}4 + (-5{,}8)$.

Решение.

а) $28 + (-14) = 28 - 14 = 14$.

б) $-2\frac{2}{7} + 4\frac{5}{7} = 4\frac{5}{7} - 2\frac{2}{7} = 2\frac{3}{7}$.

в) $2{,}4 + (-5{,}8) = -(5{,}8 - 2{,}4) = -3{,}4$.

Ответ: а) 14; б) $2\frac{3}{7}$; в) $-3{,}4$.

Немного полезной информации

При **вычитании чисел** надо к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому.

Задачи с решениями

11. Выполните вычитание: а) $-18 - 12$; б) $17 - 48$; в) $10 - (-2)$.

Решение.

а) $-18 - 12 = -18 + (-12) = -(18 + 12) = -30$.

б) $17 - 48 = 17 + (-48) = -(48 - 17) = -31$.

в) $10-(-2)=10+2=12$.

Ответ: а) -30; б) -31; в) 12.

12. Выполните вычитание $7-2\frac{5}{13}$.

Решение.

Заметим, что уменьшаемое — целое число. Чтобы выполнить вычитание, надо

- занять единицу в целой части уменьшаемого $(7=6+1)$;
- представить эту единицу в виде неправильной дроби, знаменатель которой равен знаменателю дробной части вычитаемого $\left(6+\frac{13}{13}=6\frac{13}{13}\right)$;
- отдельно выполнить вычитание целых частей и отдельно дробных частей.

$$6\frac{13}{13}-2\frac{5}{13}=(6-2)+\left(\frac{13}{13}-\frac{5}{13}\right)=4\frac{8}{13}.$$

Ответ: $4\frac{8}{13}$.

13. Выполните вычитание $6\frac{7}{15}-\frac{13}{20}$.

Решение.

$$6\frac{7^{\backslash 4}}{15}-\frac{13^{\backslash 3}}{20}=6\frac{28}{60}-\frac{39}{60}=\left(5+1+\frac{28}{60}\right)-\frac{39}{60}=$$

$$=\left(5+\frac{60}{60}+\frac{28}{60}\right)-\frac{39}{60}=5\frac{88}{60}-\frac{39}{60}=5\frac{49}{60}.$$

Ответ: $5\frac{49}{60}$.

Умножение и деление чисел

① *Немного полезной информации*

Объясним умножение столбиком на примере: найдём произведение чисел 481 и 26 (рис. 1).

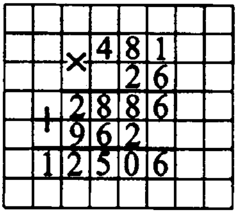


Рис. 1.

Пояснение.

1. Подпишем одно число под другим так, чтобы единицы были под единицами, десятки — под десятками.
2. Находим первое неполное произведение: $481 \cdot 6 = 2886$.
3. Находим второе неполное произведение: $481 \cdot 2 = 962$.

Пишем второе неполное произведение под первым неполным произведением, сдвинув второе на один знак влево. (Разряд единиц второго неполного произведения должен находиться под разрядом десятков первого.)

4. Сложим неполные произведения.
5. Читаем ответ (см. рис. 1): произведение чисел 481 и 26 равно 12 506.

Умножение чисел, оканчивающихся нулями

Найдём произведение чисел 4650 и 3700 (рис. 2).

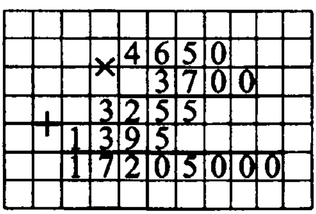


Рис. 2.

Пояснение.

1. Подписываем одно число под другим так, чтобы сотни числа 3700 были под десятками числа 4650 (то есть нули остаются «в стороне»).
2. Выполняем умножение, не обращая внимания на нули (то есть умножаем 465 и 37).
3. Складываем неполные произведения.
4. В обоих множителях считаем число нулей на конце числа: в числе 4650 — 1 нуль, в числе 3700 — 2 нуля. Всего 3 нуля, приписываем их к 17 205 (найденной сумме неполных произведений), получаем число 17 205 000.
5. Читаем ответ (см. рис. 2): произведение чисел 4650 и 3700 равно 17 205 000.

Задачи с решениями

14. Найдите значение выражения: а) 45 · 83; б) 1730 · 8200; в) 185 · 203.

Решение.

а)
$$\begin{array}{r}
\times\begin{array}{r}45\\83\end{array}\\
\hline
+\begin{array}{r}135\\360\end{array}\\
\hline
3735
\end{array}$$

б)
$$\begin{array}{r}
\times\begin{array}{r}173\,0\\82\,00\end{array}\\
\hline
+\begin{array}{r}346\\1384\end{array}\\
\hline
14186\,000
\end{array}$$

в)
$$\begin{array}{r}
\times\begin{array}{r}185\\203\end{array}\\
\hline
+\begin{array}{r}555\\370\end{array}\\
\hline
37555
\end{array}$$

Ответ: а) 3735; б) 14 186 000; в) 37 555.

Немного полезной информации

Умножение десятичных дробей

При **умножении десятичных дробей** надо

- выполнить умножение, не обращая внимания на запятые;

- отделить запятой столько цифр справа, сколько их стоит после запятой в обоих множителях вместе. (Если в произведении получается меньше цифр, чем надо отделить запятой, то впереди пишут нуль или несколько нулей.)

Задачи с решениями

15. Выполните умножение: а) $0{,}143 \cdot 0{,}02$; б) $23 \cdot 0{,}004$.

Решение.

а) $\begin{array}{r} \times\ 0{,}143 \\ 0{,}02 \\ \hline 0{,}00286 \end{array}$ б) $\begin{array}{r} \times\ 23 \\ 0{,}004 \\ \hline 0{,}092 \end{array}$

Ответ: а) 0,00286; б) 0,092.

Немного полезной информации

При умножении десятичной дроби на 0,1, 0,01, 0,001, ... надо перенести запятую влево на столько цифр, сколько нулей стоит перед единицей в множителе.

Задачи с решениями

16. Выполните умножение: а) $31{,}2 \cdot 0{,}001$; б) $0{,}001 \cdot 0{,}01$.

Решение.

а) $31{,}2 \cdot 0{,}001 = 0{,}0312$.

б) $0{,}001 \cdot 0{,}01 = 0{,}00001$.

Ответ: а) 0,0312; б) 0,00001.

Немного полезной информации

При **умножении обыкновенных дробей** надо

- найти произведение числителей и произведение знаменателей этих дробей;
- первое произведение записать числителем; второе — знаменателем.

17. Выполните умножение: а) $\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{25}$; б) $\frac{5}{16}\cdot 4$; в) $9\frac{3}{5}\cdot 1\frac{7}{12}$.

Решение.

а) $\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{25}=\frac{5\cdot 4}{8\cdot 25}=\frac{1}{10}=0{,}1.$

б) $\frac{5}{16}\cdot 4=\frac{5\cdot 4}{16}=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}.$

в) $9\frac{3}{5}\cdot 1\frac{7}{12}=\frac{48}{5}\cdot\frac{19}{12}=\frac{48\cdot 19}{5\cdot 12}=\frac{76}{5}=15\frac{1}{5}.$

Ответ: а) 0,1; б) $1\frac{1}{4}$; в) $15\frac{1}{5}$.

Немного полезной информации

При **умножении двух отрицательных чисел** надо перемножить их модули.

Задачи с решениями

18. Выполните умножение: а) $-2{,}1\cdot(-3)$; б) $-3\frac{1}{2}\cdot\left(-2\frac{4}{5}\right)$.

Решение.

а) $-2{,}1\cdot(-3)=2{,}1\cdot 3=6{,}3.$

б) $-3\frac{1}{2}\cdot\left(-2\frac{4}{5}\right)=\frac{7\cdot 14}{2\cdot 5}=\frac{98}{10}=9{,}8.$

Ответ: а) 6,3; б) 9,8.

Немного полезной информации

При **умножении двух чисел с разными знаками** надо

- поставить знак минус;
- перемножить модули этих чисел.

Задачи с решениями

19. Выполните умножение: а) $-2 \cdot 7$; б) $4{,}7 \cdot (-0{,}5)$.

Решение.

а) $-2 \cdot 7 = -(2 \cdot 7) = -14.$

б) $4{,}7 \cdot (-0{,}5) = -(4{,}7 \cdot 0{,}5) = -2{,}35.$

Ответ: а) -14; б) $-2{,}35$.

Деление чисел «уголком»

Немного полезной информации

Объясним деление «уголком» на примере: найдём частное чисел 2736 и 4 (рис. 3).

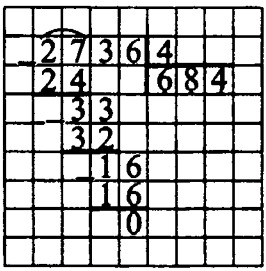


Рис. 3.

Пояснение.

1. Пишем делимое 2736, ставим «уголок» и пишем делитель 4.
2. Определяем первое неполное делимое. 2 на 4 разделить нельзя, берём 27.
3. Делим первое неполное делимое 27 на 4. Ближайшее в сторону убывания число, которое делится на 4 без остатка, — это 24.
   $24 : 4 = 6$. Пишем 6 в частное. Далее из 27 вычитаем 24. Получаем остаток 3.
4. Проверяем остаток. Он должен быть меньше делителя: $3 < 4$, верно.

5. Сносим следующую цифру — 3, получаем 33. Делим второе неполное делимое 33 на 4. Ближайшее в сторону убывания число, которое делится на 4 без остатка, — это 32. $32 : 4 = 8$. Пишем 8 в частное. Далее из 33 вычитаем 32. Получаем остаток 1.
6. Проверяем остаток: $1 < 4$, верно.
7. Сносим следующую цифру — 6, получаем 16. Делим третье неполное делимое 16 на 4, $16 : 4 = 4$. Пишем в частном 4. Из 16 вычитаем 16, получаем 0.
8. Читаем ответ: частное чисел 2736 и 4 равно 684 (см. рис. 3).

Задачи с решениями

20. Вычислите: а) $4857 : 3$; б) $20\,150 : 5$; в) $63\,810 : 9$.

Решение.

а)
$$\begin{array}{r|l}
-4857 & 3 \\ \cline{2-2}
\underline{3} & 1619 \\
-18 & \\
\underline{18} & \\
-5 & \\
\underline{3} & \\
-27 & \\
\underline{27} & \\
0 &
\end{array}$$

б)
$$\begin{array}{r|l}
-20150 & 5 \\ \cline{2-2}
\underline{20} & 4030 \\
-15 & \\
\underline{15} & \\
0 &
\end{array}$$

в)
$$\begin{array}{r|l}
-63810 & 9 \\ \cline{2-2}
\underline{63} & 7090 \\
-81 & \\
\underline{81} & \\
0 &
\end{array}$$

Ответ: а) 1619; б) 4030; в) 7090.

Немного полезной информации

При **делении десятичной дроби на натуральное число** надо

- разделить дробь на это число, не обращая внимания на запятую;

- поставить в частном запятую, когда кончится деление целой части. Если целая часть меньше делителя, то частное начинается с нуля целых.

21. Вычислите: а) 3,28 : 2; б) 81,27 : 90.

Решение.

а) $$\begin{array}{r|l} -3,28 & 2 \\ \cline{2-2} \underline{2} & 1,64 \\ -1\,2 & \\ \underline{1\,2} & \\ -8 & \\ \underline{8} & \\ 0 & \end{array}$$

б) $$\begin{array}{r|l} -81,27 & 90 \\ \cline{2-2} \underline{0} & 0,903 \\ -81\,2 & \\ \underline{81\,0} & \\ -270 & \\ \underline{270} & \\ 0 & \end{array}$$

Ответ: а) 1,64; б) 0,903.

ⓘ *Немного полезной информации*

При **делении десятичной дроби на 10, 100, 1000, . . .** надо перенести запятую в этой дроби на столько цифр влево, сколько нулей стоит после единицы в делителе.

При этом иногда необходимо написать перед целой частью нуль или несколько нулей.

22. Выполните деление: а) 53,7 : 10; б) 23,41 : 1000.

Решение.

а) $53,7 : 10 = 5,37$.

б) $23,41 : 1000 = 0,02341$.

Ответ: а) 5,37; б) 0,02341.

Немного полезной информации

При **делении чисел на десятичную дробь** надо

- в делимом и делителе перенести запятую вправо на столько цифр, сколько их после запятой в делителе;

- после этого выполнить деление на натуральное число.

Задачи с решениями

23. Выполните деление: а) 10,5 : 3,5; б) 0,125 : 0,5; в) 4,5 : 0,009.

Решение.

а) $10{,}5 : 3{,}5 = 105 : 35 = 3$.

б) $0{,}125 : 0{,}5 = 1{,}25 : 5 = 0{,}25$.

$$
\begin{array}{r|l}
-1{,}25 & 5 \\ \cline{2-2}
\underline{0\phantom{{,}25}} & 0{,}25 \\
-12 & \\
\underline{10} & \\
-25 & \\
\underline{25} & \\
0 &
\end{array}
$$

в) $4{,}5 : 0{,}009 = 4500 : 9 = 500$.

Ответ: а) 3; б) 0,25; в) 500.

24. Найдите значение выражения: а) 93,15 : 23;
б) 46,08 : 0,384; в) 29,029 : 20,02.

Решение.

а)
$$\begin{array}{r|l} -93{,}15 & 23 \\ \cline{2-2} 92 & 4{,}05 \\ \hline -1\,15 & \\ 1\,15 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

б)
$$\begin{array}{r|l} -46080 & 384 \\ \cline{2-2} 384 & 120 \\ \hline -768 & \\ 768 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

в)
$$\begin{array}{r|l} -2902{,}9 & 2002 \\ \cline{2-2} 2002 & 1{,}45 \\ \hline -900\,9 & \\ 800\,8 & \\ \hline -100\,10 & \\ 100\,10 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Ответ: а) 4,05; б) 120; в) 1,45.

① *Немного полезной информации*

При **делении обыкновенных дробей** надо делимое умножить на число, обратное делителю. (Два числа, произведение которых равно 1, называют взаимно обратными.)

Задачи с решениями

25. Выполните деление: а) $\frac{3}{7} : \frac{6}{13}$; б) $2\frac{2}{5} : 1\frac{1}{15}$; в) $0 : 5\frac{1}{17}$; г) $\frac{2}{3} : 4$; д) $7 : \frac{2}{5}$.

Решение.

а) $\frac{3}{7} : \frac{6}{13} = \frac{3}{7} \cdot \frac{13}{6} = \frac{3 \cdot 13}{7 \cdot 6} = \frac{13}{14}$.

б) $2\frac{2}{5} : 1\frac{1}{15} = \frac{12}{5} : \frac{16}{15} = \frac{12}{5} \cdot \frac{15}{16} = \frac{12 \cdot 15}{5 \cdot 16} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$.

в) $0 : 5\frac{1}{17} = 0$.

г) $\frac{2}{3} : 4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{6}$.

д) $7 : \frac{2}{5} = 7 \cdot \frac{5}{2} = \frac{7 \cdot 5}{2} = \frac{35}{2} = 17\frac{1}{2}$.

Ответ: а) $\frac{13}{14}$; б) $2\frac{1}{4}$; в) 0; г) $\frac{1}{6}$; д) $17\frac{1}{2}$.

Немного полезной информации

При **делении отрицательного числа на отрицательное** надо разделить модуль делимого на модуль делителя.

Задачи с решениями

26. Выполните деление: а) $-4{,}2 : (-6)$; б) $-56 : (-8)$; в) $-2\frac{1}{5} : \left(-\frac{11}{15}\right)$.

Решение.

а) $-4{,}2 : (-6) = 4{,}2 : 6 = 0{,}7$.

б) $-56 : (-8) = 56 : 8 = 7$.

в) $-2\frac{1}{5} : \left(-\frac{11}{15}\right) = \frac{11 \cdot 15}{5 \cdot 11} = 3$.

Ответ: а) 0,7; б) 7; в) 3.

Немного полезной информации

При **делении чисел с разными знаками** надо

- поставить знак минус;
- разделить модуль делимого на модуль делителя.

Задачи с решениями

27. Выполните деление: а) $45 : (-15)$; б) $-2{,}8 : 0{,}04$; в) $-3\frac{1}{6} : \frac{19}{36}$.

Решение.

а) $45 : (-15) = -(45 : 15) = -3$.

б) $-2{,}8 : 0{,}04 = -(2{,}8 : 0{,}04) = -(280 : 4) = -70$.

в) $-3\frac{1}{6} : \frac{19}{36} = -\frac{19 \cdot 36}{6 \cdot 19} = -6$.

Ответ: а) -3; б) -70; в) -6.

Величины

Немного полезной информации

Мы рассмотрели действия над числами. Следует привести примеры действий над величинами.

Вспомним соотношение некоторых величин.

Единицы массы

1 т = 1000 кг

1 ц = 100 кг

1 кг = 1000 г

1 г = 1000 мг

Единицы времени

1 ч = 60 мин

1 мин = 60 с

1 сут. = 24 ч

Единицы длины

1 км = 1000 м

1 м = 10 дм

1 м = 100 см

1 дм = 10 см

1 а = 100 м^2

Единицы площади

1 м^2 = 10 000 см^2

1 га = 10 000 м^2

1 га = 100 а

1 см = 10 мм

Задачи с решениями

28. Переведите в граммы: а) 2 кг 230 г; б) 9 кг 17 г; в) 2 г 300 мг.

Решение.

а) 2 кг 230 г $= (2 \cdot 1000 + 230)$ г $= (2000 + 230)$ г $= 2230$ г.

б) 9 кг 17 г $= (9 \cdot 1000 + 17)$ г $= (9000 + 17)$ г $= 9017$ г.

в) 2 г 300 мг $= 2\frac{300}{1000}$ г $= 2{,}3$ г.

Ответ: а) 2230 г; б) 9017 г; в) 2,3 г.

29. Переведите в метры: а) 12 км 48 м; б) 2 км 300 м; в) 3 м 5 см.

Решение.

а) 12 км 48 м $= (12 \cdot 1000 + 48)$ м $= (12\,000 + 48)$ м $= 12\,048$ м.

б) 2 км 300 м $= (2 \cdot 1000 + 300)$ м $= (2000 + 300)$ м $= 2300$ м.

в) 3 м 5 см $= 3\frac{5}{100}$ м $= 3{,}05$ м.

Ответ: а) 12 048 м; б) 2300 м; в) 3,05 м.

30. Переведите в минуты: а) 2 ч 30 мин; б) 4 ч 5 мин; в) 5 мин 30 с.

Решение.

а) 2 ч 30 мин $= (2 \cdot 60 + 30)$ мин $= (120 + 30)$ мин $= 150$ мин.

б) 4 ч 5 мин $= (4 \cdot 60 + 5)$ мин $= (240 + 5)$ мин $= 245$ мин.

в) 5 мин 30 с $= 5\frac{30}{60}$ мин $= 5{,}5$ мин.

Ответ: а) 150 мин; б) 245 мин; в) 5,5 мин.

31. Найдите значение выражения.

а) 75 кг 300 г − 5 кг 15 г + 150 г − 73 г =
= 75300 г − 5015 г + 150 г − 73 г = 70362 г = 70 кг 362 г.

б) 35 кг 410 г + 120 г − 8 кг 15 г − 33 г = (35 кг 410 г + 120 г) −
− (8 кг 15 г + 33 г) = 35 кг 530 г − 8 кг 48 г = 27 кг 482 г.

32. Выполните действия. Ответ запишите в кг.

а) 3 кг 528 г + 472 г − 2 кг 32 г;

б) 57 кг 40 г + 48 кг 200 г − 42 кг 5 г.

Решение.

а) 3 кг 528 г + 472 г − 2 кг 32 г = $3\frac{528}{1000}$ кг + $\frac{472}{1000}$ кг −
− $2\frac{32}{1000}$ кг = 3,528 кг + 0,472 кг − 2,032 кг = 1,968 кг.

б) 57 кг 40 г + 48 кг 200 г − 42 кг 5 г = 57,04 кг + 48,2 кг −
− 42,005 кг = 63,235 кг.

Ответ: а) 1,968 кг; б) 63,235 кг.

Стандартный вид числа

Каждое число, большее 10, можно записать в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \leqslant a < 10$ и n — натуральное число. Такая запись числа называется **стандартным видом числа**.

Аналогично любое положительное число можно представить в виде $a \cdot 10^m$, $1 \leqslant a < 10$, m — целое.

33. Запишите в стандартном виде число: а) 358; б) 87 370; в) 5 200 000.

Решение.

а) $358 = 3{,}58 \cdot 10^2$.

б) $87\,370 = 8{,}737 \cdot 10^4$.

в) $5\,200\,000 = 5{,}2 \cdot 10^6$.

Ответ: а) $3{,}58 \cdot 10^2$; б) $8{,}737 \cdot 10^4$; в) $5{,}2 \cdot 10^6$.

34. Выполните действия: а) $(2{,}4 \cdot 10^6) : (1{,}2 \cdot 10^5)$; б) $(2{,}3 \cdot 10^3) \cdot (1{,}1 \cdot 10^4)$.

Решение.

а) $(2{,}4 \cdot 10^6) : (1{,}2 \cdot 10^5) = (2{,}4 : 1{,}2) \cdot 10^{6-5} = 2 \cdot 10 = 20$.

б) $(2{,}3 \cdot 10^3) \cdot (1{,}1 \cdot 10^4) = (2{,}3 \cdot 1{,}1) \cdot 10^{3+4} = 2{,}53 \cdot 10^7$.

Ответ: а) 20; б) $2{,}53 \cdot 10^7$.

Отношения

Немного полезной информации

Отношение двух чисел — это частное от деления одного из них на другое. Отношение показывает, во сколько раз первое число больше второго или какую часть первое число составляет от второго.

Например, $\frac{15}{5} = 3$ показывает, что число 15 в 3 раза больше числа 5; $\frac{7}{63} = \frac{1}{9}$ показывает, что число 7 составляет $\frac{1}{9}$ часть от числа 63.

Если значения двух величин выражены разными единицами измерения, то для нахождения отношения этих величин надо предварительно перейти к одной единице измерения.

Отношение $\frac{b}{a}$ называют обратным отношению $\frac{a}{b}$.

Задачи с решениями

35. Найдите отношения:

а) 152 к 8; б) $\frac{12}{40}$; в) 0,25 к 0,55; г) 1,35 к $5\frac{5}{8}$.

Решение.

а) $152 : 8 = \frac{152}{8} = 19.$

б) $12 : 40 = \frac{12}{40} = 0{,}3.$

в) $0{,}25 : 0{,}55 = \frac{25}{55} = \frac{5}{11}.$

г) $1{,}35 : 5\frac{5}{8} = \frac{135 \cdot 8}{100 \cdot 45} = \frac{3 \cdot 2}{25 \cdot 1} = \frac{6}{25} = 0{,}24.$

36. Найдите отношения:

а) 30 мин к 10 с; б) 0,5 м^2 к 0,1 дм^2; в) 0,2 кг к 0,2 г.

Решение.

а) 3 мин : 10 с = 180 с : 10 с = 18.

б) 0,5 м^2 : 0,1 дм^2 = 50 дм^2 : 0,1 дм^2 = 500.

в) 0,2 кг : 0,2 г = 200 г : 0,2 г = 1000.

Пропорции

Немного полезной информации

- Равенство двух отношений называют **пропорцией**.

- В пропорции $a : b = c : d$, или $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, числа a и d называются **крайними членами**, а числа b и c — **средними членами** пропорции.

- В верной пропорции произведение крайних членов равно произведению средних членов, т. е. $a \cdot d = b \cdot c$.

- Неизвестный крайний член пропорции равен произведению средних членов, делённому на известный крайний член.

  Например, $x : 5 = 8 : 4$, $x = \dfrac{5 \cdot 8}{4} = 10$.

- Неизвестный средний член пропорции равен произведению крайних членов, делённому на известный средний.

  Например, $9 : 3 = x : 2$, $x = \dfrac{9 \cdot 2}{3} = 6$.

37. $x : 1{,}5 = 2{,}8 : 7$.

Решение.

Используя основное свойство пропорции, получим $x \cdot 7 = 1{,}5 \cdot 2{,}8$. Отсюда $x = \dfrac{1{,}5 \cdot 2{,}8}{7} = \dfrac{1{,}5 \cdot 0{,}4}{1} = 0{,}6$.

Ответ: 0,6.

38. $37{,}6 : 8 = x : 6$.

Решение.

Используя основное свойство пропорции, получим $8 \cdot x = 37{,}6 \cdot 6$. Отсюда $x = \dfrac{37{,}6 \cdot 6}{8} = \dfrac{4{,}7 \cdot 6}{1} = 28{,}2$.

Ответ: 28,2.

Проценты

① *Немного полезной информации*

- **1%** — это $\frac{1}{100}$ часть от целого, **25%** — это $\frac{25}{100} = 0{,}25$ от целого.
- Процент от числа находится действием умножения.
  Например, надо найти 20% от числа 250.
  Делаем так: $250 \cdot \frac{20}{100} = 50$.
- Число по его проценту находится действием деления.
  Например, надо найти число, если 25% его составляет 35.
  Делаем так: $35 : \frac{25}{100} = \frac{35 \cdot 100}{25} = 140$.
- Чтобы найти, сколько процентов одно число составляет от другого, надо найти отношение этих чисел и результат умножить на 100%.
  Например, надо найти, сколько процентов число 4 составляет от числа 8.
  Делаем так: $\frac{4}{8} \cdot 100\% = 50\%$.

Иногда **задачи на проценты** удобно решать, составив **пропорцию**.

Задачи с решениями

39. Найдите 10% от числа 125.

Решение.

10% = 0,10 = 0,1. Следовательно, 10% от числа 125 равны $125 \cdot 0,1 = 12,5$.

Ответ: 12,5.

Иррациональные числа

Немного полезной информации

Арифметическим квадратным корнем из числа a называется неотрицательное число, квадрат которого равен a.

При любом $a \geqslant 0$ выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл. Если $a < 0$, то выражение $\sqrt{a}$ не имеет смысла.

Из определения арифметического корня следует, что если выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл, то $\sqrt{a} \geqslant 0$ и $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Свойства арифметического квадратного корня

1) Если $a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,$ то $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

2) Если $a \geqslant 0,\ b > 0,$ то $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

3) $\sqrt{a^2} = |a|$.

Задачи с решениями

40. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{2500}$; б) $-\sqrt{0,0004}$; в) $2\sqrt{\frac{81}{16}}$; г) $\frac{7}{22} \cdot \sqrt{1,21}$.

Решение.

а) $\sqrt{2500} = \sqrt{25 \cdot 100} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{100} = 5 \cdot 10 = 50$.

б) $-\sqrt{0,0004} = -\sqrt{\frac{4}{10000}} = -\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{10000}} = -\frac{2}{100} = -0,02.$

в) $2\sqrt{\frac{81}{16}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{16}} = 2 \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{2} = 4,5.$

г) $\frac{7}{22} \cdot \sqrt{1,21} = \frac{7}{22} \cdot \sqrt{\frac{121}{100}} = \frac{7 \cdot 11}{22 \cdot 10} = 0,35.$

Ответ: а) 50; б) $-0,02$; в) 4,5; г) 0,35.

41. Внесите множитель под знак корня:

а) $5\sqrt{3}$; б) $-3\sqrt{7}$.

Решение.

а) $5\sqrt{3} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{75}.$

б) $-3\sqrt{7} = -\sqrt{3^2 \cdot 7} = -\sqrt{9 \cdot 7} = -\sqrt{63}.$

Ответ: а) $\sqrt{75}$; б) $-\sqrt{63}$.

42. Упростите выражение:

а) $\sqrt{27} - \sqrt{3}$; б) $\sqrt{125} - 2\sqrt{5}$;

в) $\frac{\sqrt{216}}{9} + \frac{\sqrt{6}}{3}$; г) $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{28} - \sqrt{7}$.

Решение.

а) $\sqrt{27} - \sqrt{3} = \sqrt{9 \cdot 3} - \sqrt{3} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{3} = 3\sqrt{3} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$

б) $\sqrt{125} - 2\sqrt{5} = \sqrt{25 \cdot 5} - 2\sqrt{5} = 5\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}.$

в) $\frac{\sqrt{216}}{9} + \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{36 \cdot 6}}{9} + \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{36} \cdot \sqrt{6}}{9} + \frac{\sqrt{6}}{3} =$

$= \frac{6\sqrt{6}}{9} + \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{3} = \sqrt{6}.$

г) $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{28}-\sqrt{7}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4\cdot 7}-\sqrt{7}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{7}-\sqrt{7}=$

$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{7}-\sqrt{7}=\sqrt{7}-\sqrt{7}=0.$

Ответ: а) $2\sqrt{3}$; б) $3\sqrt{5}$; в) $\sqrt{6}$; г) 0.

43. Вычислите $\sqrt{3\frac{1}{16}}-2\sqrt{0{,}25}$.

Решение.

$$\sqrt{3\frac{1}{16}}-2\sqrt{0{,}25}=\sqrt{\frac{49}{16}}-2\cdot 0{,}5=\frac{7}{4}-1=1{,}75-1=0{,}75.$$

Ответ: 0,75.

44. Вычислите $\frac{1}{5}\sqrt{3\cdot 75}+4\cdot\sqrt{5\cdot\frac{1}{20}}$.

Решение.

$\frac{1}{5}\sqrt{3\cdot 75}+4\cdot\sqrt{5\cdot\frac{1}{20}}=\frac{1}{5}\sqrt{225}+4\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{5}\cdot 15+4\cdot\frac{1}{2}=$

$=3+2=5.$

Ответ: 5.

45. Найдите значение выражения $\sqrt{b^2}-\sqrt{11}$ при $b=\sqrt{11}$.

Решение.

Подставим $b=\sqrt{11}$ в выражение $\sqrt{b^2}-\sqrt{11}$. Получим $\sqrt{\left(\sqrt{11}\right)^2}-\sqrt{11}=\sqrt{11}-\sqrt{11}=0.$

Ответ: 0.

46. Упростите выражение $(7\sqrt{3}+17\sqrt{48}-\sqrt{147}):(2\sqrt{3})$.

Решение.

$(7\sqrt{3}+17\sqrt{48}-\sqrt{147}):(2\sqrt{3})=$

$=(\sqrt{147}+17\sqrt{48}-\sqrt{147}):(2\sqrt{3})=$

$=\frac{17\sqrt{48}}{2\sqrt{3}}=\frac{17}{2}\sqrt{\frac{48}{3}}=\frac{17}{2}\sqrt{16}=\frac{17\cdot 4}{2}=34.$

Ответ: 34.

47. Сократите дробь $\dfrac{25-y}{5-\sqrt{y}}$, если $\sqrt{y} \neq 5$.

Решение.

$$\frac{25-y}{5-\sqrt{y}} = \frac{(5-\sqrt{y})(5+\sqrt{y})}{5-\sqrt{y}} = 5+\sqrt{y}.$$

Ответ: $5+\sqrt{y}$.

48. Исключите иррациональность из знаменателя:

а) $\dfrac{3}{\sqrt{7}}$; б) $\dfrac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

Решение.

а) $\dfrac{3}{\sqrt{7}} = \dfrac{3\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}} = \dfrac{3\sqrt{7}}{7}$.

б) $\dfrac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \dfrac{5(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \dfrac{5(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} =$

$= \dfrac{5(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2} = 5(\sqrt{3}+\sqrt{2})$.

Ответ: а) $\dfrac{3\sqrt{7}}{7}$; б) $5(\sqrt{3}+\sqrt{2})$.

49. Найдите значение выражения $2x^2 - 4\sqrt{3}x - 1$, если $x = \sqrt{3}-1$.

Решение.

Подставляя в заданное выражение значение x, получим $2(\sqrt{3}-1)^2 - 4\sqrt{3}(\sqrt{3}-1) - 1 = 2(3-2\sqrt{3}+1) - 4\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} + {}$ $+ 4\sqrt{3} - 1 = 6 - 4\sqrt{3} + 2 - 12 + 4\sqrt{3} - 1 = -5$.

Ответ: -5.

50. При каких значениях a имеет смысл выражение $\dfrac{1}{\sqrt{4a-1}}$?

Решение.

Учитывая, что квадратный корень определён на множестве неотрицательных чисел, а знаменатель дроби отличен от нуля, выражение $\frac{1}{\sqrt{t}}$ имеет смысл при $t > 0$. Значит, выражение $\frac{1}{\sqrt{4a-1}}$ имеет смысл, если $4a - 1 > 0$. Отсюда $a > 0{,}25$.

Ответ: $(0{,}25; +\infty)$.

51. Найдите наименьшее целое число, входящее в область допустимых значений выражения $\frac{\sqrt{5x-17}}{x-4}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 5x - 17 \geqslant 0, \\ x - 4 \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 3{,}4, \\ x \neq 4. \end{cases}$

Следовательно, наименьшим целым числом, входящим в область допустимых значений исходного выражения, является 5.

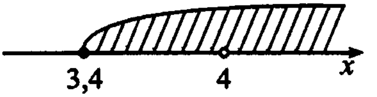


Рис. 4.

Ответ: 5.

Немного полезной информации

Рациональным называется число, которое можно представить в виде $\frac{m}{n}$, где m — целое, n — натуральное. Например, $\frac{2}{3}$, $-\frac{4}{9}$, 7. Остальные числа называют **иррациональными**.

Если $\frac{m}{n} > 0$ — несократимая дробь (и числитель, и знаменатель нельзя сократить на одно и то же число), то $\sqrt{\frac{m}{n}}$ иррационально.

Сумма рациональных чисел рациональна.

Целое число называется **чётным**, если оно делится на 2, и **нечётным** в противном случае.

Задачи с решениями

52. Какое из указанных чисел является рациональным?

1) $\frac{(\sqrt{24}-\sqrt{5})(\sqrt{24}+\sqrt{5})}{\sqrt{19}}$,

2) $(\sqrt{17}+\sqrt{3})(\sqrt{17}-\sqrt{3})+\sqrt{5}$,

3) $(2+\sqrt{2})^2-4\sqrt{2}$;

4) $\sqrt{7}+2$.

Решение.

Преобразуем каждое выражение:

1) $\frac{(\sqrt{24}-\sqrt{5})(\sqrt{24}+\sqrt{5})}{\sqrt{19}} = \frac{24-5}{\sqrt{19}} = \sqrt{19}$ — иррациональное число;

2) $(\sqrt{17}+\sqrt{3})(\sqrt{17}-\sqrt{3})+\sqrt{5} = 17-3+\sqrt{5}$ — иррациональное число;

3) $(2+\sqrt{2})^2-4\sqrt{2} = 6+4\sqrt{2}-4\sqrt{2} = 6$ — рациональное число;

4) $\sqrt{7}+2$ — иррациональное число.

Ответ: 3.

Варианты для самостоятельного решения

Вариант 1

1. Выполните действия $3{,}5 - (-13{,}12) + (-5{,}173)$.

2. Найдите значение выражения $|-3 : 2{,}5| - 1\frac{2}{3}$.

3. Сколько целых чисел принадлежит промежутку $[\sqrt{23}; \sqrt{195}]$?

4. Запишите число 737,7 тыс. в стандартном виде.

5. Выполните действие 57 м 40 см − 19 м 3 дм. Ответ запишите в метрах.

6. Найдите значение выражения $3\frac{1}{2} + (13{,}12 - 5{,}17) \cdot \frac{1}{5}$.

7. Какое из указанных чисел является рациональным?

1) $\sqrt{6} + 1$ 2) $(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2$

3) $(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)$ 4) $\dfrac{\sqrt{72}}{\sqrt{36}}$

Вариант 2

1. Выполните действия $4\frac{1}{19} \cdot \frac{38}{77} \cdot 0{,}05$.

2. Найдите значения выражения $-1\frac{7}{12} + |2 : (-1{,}5)|$.

3. Выберите наименьшее из чисел $\sqrt{17}$, 4, $3\sqrt{2}$, $2\sqrt{3}$.

4. Запишите число 142 600 в стандартном виде.

5. Выполните действие 75 кг 300 г − 5 кг 15 г. Ответ запишите в килограммах.

6. Найдите значения выражения $\left(12{,}1 : \frac{11}{3} - 1{,}2\right) \cdot 1\frac{1}{7}$.

7. Какое из указанных чисел является рациональным?

1) $(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 + 3\sqrt{10}$ 2) $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{36}}$ 3) $\sqrt{7} - 1$ 4) $\frac{\sqrt{144}}{\sqrt{24}}$

Вариант 3

1. Выполните действия $3{,}75 + (-10{,}5) - (-17{,}003)$.

2. Найдите значение выражения $-3{,}27 : |-0{,}3| + 1\frac{5}{7}$.

3. Вычислите $\sqrt{4\frac{1}{18}} : \sqrt{1\frac{1}{72}}$.

4. Выполните деление $54\,000 : 1{,}8$. В ответе запишите число в стандартном виде.

5. Выполните действие 32 м 13 см – 12 дм 5 см. Ответ запишите в метрах.

6. Найдите значение выражения $5\frac{1}{2} + (12{,}17 - 25{,}82) : 3$.

7. Какое из указанных чисел является иррациональным?

1) $\sqrt{25}$ 2) $\frac{17}{3} - 1$ 3) $\frac{\sqrt{810}}{\sqrt{10}}$ 4) $(\sqrt{3} - 1)^2$

Вариант 4

1. Выполните действия $(-2{,}81) + 12{,}009 - (-5{,}4)$.

2. Найдите значение выражения $|-8{,}72| : 0{,}08 + 1\frac{2}{25}$.

3. Вычислите $\frac{\sqrt{72} + \sqrt{18}}{\sqrt{72}}$.

4. Выполните деление $108{,}8 : 0{,}00064$. В ответе запишите число в стандартном виде.

5. Выполните действие 5 кг 200 г – 3 кг 15 г. Ответ запишите в килограммах.

6. Найдите значение выражения $3\frac{4}{5} + (8{,}52 - 13{,}2) : 0{,}2$.

7. Какое из указанных чисел является иррациональным?

1) $(\sqrt{148} - \sqrt{64})(\sqrt{148} + 8)$ 2) $(\sqrt{7} + 1)^2 - 2\sqrt{7}$

3) $\dfrac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$ 4) $\dfrac{\sqrt{7} - \sqrt{2}}{\sqrt{7} + \sqrt{2}} + \dfrac{2\sqrt{14}}{5}$

Вариант 5

1. Выполните действия $-2{,}86 - (-7{,}004) + (-4{,}144)$.

2. Найдите значение выражения $-6{,}036 : |-0{,}503| + 12\frac{2}{3}$.

3. Сколько целых чисел принадлежит промежутку $[\sqrt{15}; \sqrt{150}]$?

4. Выполните умножение $2300 \cdot 1{,}1$ и в ответе запишите число в стандартном виде.

5. Выполните действие 75 кг 300 г – 5 кг 15 г. Ответ запишите в килограммах.

6. Найдите значение выражения $3\frac{1}{2} + (15{,}16 - 10{,}3) : 0{,}3$.

7. Какое из указанных чисел является чётным целым?

1) $\sqrt{25}$ 2) $\sqrt{\dfrac{2}{8}}$ 3) $\sqrt{\dfrac{16}{4}}$ 4) $\sqrt{7} + 2$

Вариант 6

1. Выполните действия $-5{,}64-(-10{,}006)+15{,}634$.

2. Найдите значение выражения $|-12{,}004|:30{,}01+\left|-5\frac{2}{5}\right|$.

3. Вычислите $\sqrt{1\frac{3}{65}}\cdot\sqrt{3\frac{28}{34}}$.

4. Выполните деление $24:0{,}00012$ и в ответе запишите число в стандартном виде.

5. Выполните действие 15 мин 30 с + 2 мин 45 с. Ответ запишите в минутах.

6. Найдите значение выражения $2\frac{3}{5}+(10{,}31-5{,}21):0{,}3$.

7. Какое из указанных чисел является целым?

1) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ 2) $\sqrt{\frac{25}{4}}$ 3) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2$ 4) $\frac{\sqrt{180}}{\sqrt{20}}$

Глава 2. Алгебраические выражения

① *Немного полезной информации*

Алгебраическое выражение — это запись из чисел и букв, соединённых знаками действий и скобками.

Приведём примеры алгебраических выражений:

$3(a+b)$; $7x+1$; y; $2yz$; $\frac{2a+c}{x}$.

Значение выражения мы получаем при замене каждой буквы некоторым числом и выполнении алгебраических действий.

Например, найдём значение выражения $7a - 3ab + 1$ при $a = 4,\ b = 2$. Подставив вместо букв указанные числа, получим $7 \cdot 4 - 3 \cdot 4 \cdot 2 + 1 = 28 - 24 + 1 = 5$.

Слагаемые, имеющие одинаковые буквенные множители, называют **подобными**.

Например, слагаемые $3ab$ и $-5ab$ являются подобными. Также являются подобными слагаемые $4x$ и $10x$. А слагаемые $3x$ и $3y$ подобными не являются.

При упрощении выражения следует находить суммы подобных слагаемых, то есть выполнять **приведение подобных слагаемых**.

Задачи с решениями

1. Упростите выражение $5xy + x + y - 2xy - 3xy$ и найдите его значение при $x = 2 + \sqrt{2},\ y = 3 - \sqrt{2}$.

Решение.

В исходном выражении найдём и подчеркнём все подобные слагаемые: $\underline{5xy}+x+y-\underline{2xy}-\underline{3xy}$. Найдём сумму подчёркнутых слагаемых: $5xy - 2xy - 3xy = (5 - 2 - 3)xy = 0xy = 0$. Таким образом, $5xy + x + y - 2xy - 3xy = x + y$. Подставляя вместо x и y указанные в условии числа, получаем $x + y = 2 + \sqrt{2} + 3 - \sqrt{2} = 5$.

Ответ: 5.

2. Упростите выражение $5a + 3\sqrt{7} - 4a - 4\sqrt{7}$ и найдите его значение при $a = 2 + \sqrt{7}$.

Решение.

В исходном выражении найдём и подчеркнём все подобные слагаемые: $\underline{5a}+\underline{\underline{3\sqrt{7}}}-\underline{4a}-\underline{\underline{4\sqrt{7}}}$. Найдём сумму слагаемых, подчёркнутых одной чертой: $5a-4a=a$. Теперь найдём сумму слагаемых, подчёркнутых двумя чертами: $3\sqrt{7}-4\sqrt{7}=-\sqrt{7}$. Таким образом, $5a+3\sqrt{7}-4a-4\sqrt{7}=a-\sqrt{7}$. Подставляя вместо a указанное в условии число, получаем $a-\sqrt{7}=2+\sqrt{7}-\sqrt{7}=2$.

Ответ: 2.

Правила раскрытия скобок

ⓘ *Немного полезной информации*

- Если перед скобками стоит знак «+», то при раскрытии скобок все слагаемые остаются без изменений.
  Например, $2a+(3b-c+4)=2a+3b-c+4$.
- Если перед скобками стоит знак «−», то при раскрытии скобок каждое слагаемое меняет знак на противоположный. Например, $4x-(y-6z-5)=4x-y+6z+5$.
- Если перед скобками (или после скобок) стоит множитель, то при раскрытии скобок каждое слагаемое умножается на этот множитель. При подсчёте этих произведений следует учитывать как знак множителя за скобками, так и знаки слагаемых внутри скобок.
  Рассмотрим два примера:
  $(5a-b-8)\cdot 4c=5a\cdot 4c+(-b)\cdot 4c+(-8)\cdot 4c=$
  $=20ac-4bc-32c;$
  $-2x(3y-z+4)=(-2x)\cdot 3y+(-2x)\cdot(-z)+(-2x)\cdot 4=$
  $=-6xy+2xz-8x.$

Задачи с решениями

3. Упростите выражение $(b-c)\cdot 4a+4ac$ и найдите его значение при $a=\sqrt{2},\ b=2\sqrt{2},\ c=3\sqrt{2}$.

Решение.

$(b - c) \cdot 4a + 4ac = 4ba - 4ca + 4ac = 4ba$. Подставляя вместо a и b указанные в условии числа, получаем $4ba = 4\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 4\cdot 2\cdot 2 = 16$.

Ответ: 16.

4. Упростите выражение $3ac - a(c-3b) - 3ab$ и найдите его значение при $a=\sqrt{3},\ b=5\sqrt{3},\ c=3\sqrt{3}$.

Решение.

$3ac - a(c-3b) - 3ab = 3ac - a\cdot c - a\cdot(-3b) - 3ab =$
$= 3ac - ac + 3ab - 3ab = 2ac$. Подставляя вместо a и c указанные в условии числа, получаем $2ac = 2\cdot\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3} = 2\cdot 3\cdot 3 = 18$.

Ответ: 18.

Немного полезной информации

Если требуется раскрыть произведение, состоящее из нескольких скобок, то скобки следует раскрывать поочерёдно. Например:

$$(3a-2b)(4x-5y) = 3a(4x-5y) - 2b(4x-5y) =$$
$$= 3a\cdot 4x + 3a\cdot(-5y) + (-2b)\cdot 4x + (-2b)\cdot(-5y) =$$
$$= 12ax - 15ay - 8bx + 10by.$$

В этом примере мы сначала раскрыли первые скобки $(3a-2b)$, а затем вторые скобки $(4x-5y)$. Но можно было сделать и по-другому, начав с раскрытия вторых скобок:

$$(3a-2b)(4x-5y) = (3a-2b)\cdot 4x + (3a-2b)\cdot(-5y) =$$
$$= 3a\cdot 4x + (-2b)\cdot 4x + 3a\cdot(-5y) + (-2b)\cdot(-5y) =$$
$$= 12ax - 8bx - 15ay + 10by.$$

Задачи с решениями

5. Упростите выражение $(a-6)(b+5)-ab+6b$ и найдите его значение при $a=7$, $b=3+4\sqrt{7}$.

Решение.

$(a-6)(b+5)-ab+6b=a(b+5)-6(b+5)-ab+6b=$ $=ab+5a-6b-30-ab+6b=5a-30$. Подставляя $a=7$, получаем $5a-30=5\cdot 7-30=35-30=5$.

Ответ: 5.

Формулы сокращённого умножения

Немного полезной информации

Следует запомнить три формулы сокращённого умножения.

- Квадрат суммы: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.
- Квадрат разности: $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.
- Разность квадратов: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

Например:

$(2c+3)^2=(2c)^2+2\cdot 2c\cdot 3+3^2=4c^2+12c+9$;

$(3k-1)^2=(3k)^2-2\cdot 3k+1=9k^2-6k+1$;

$t^2-25=t^2-5^2=(t-5)(t+5)$.

Задачи с решениями

6. Сократите дробь $\dfrac{x^2+2x+1}{x+1}$, $x\neq -1$.

Решение.

$$\frac{x^2+2x+1}{x+1}=\frac{x^2+2\cdot x\cdot 1+1^2}{x+1}=\frac{(x+1)^2}{x+1}=x+1.$$

Ответ: $x+1$.

7. Сократите дробь $\dfrac{a^2-9}{a+3}$, $a \neq -3$.

Решение.

$$\frac{a^2-9}{a+3} = \frac{a^2-3^2}{a+3} = \frac{(a-3)(a+3)}{a+3} = a-3.$$

Ответ: $a-3$.

Допустимые значения переменных

Немного полезной информации

- **Допустимые значения переменных** — это значения, при которых алгебраическое выражение имеет смысл.
- Если в выражении есть дробь, то **знаменатель дроби** должен быть **отличен от нуля**.

  Например, для выражения $\dfrac{b}{a-2}$ допустимыми являются значения переменных, удовлетворяющие условию $a-2 \neq 0$, то есть $a \neq 2$.
- Если в алгебраическом выражении есть квадратный корень, то **подкоренное выражение** должно быть **неотрицательно**.

Например, для выражения $\sqrt{y+3}$ допустимыми являются значения переменных, удовлетворяющие условию $y+3 \geqslant 0$, то есть $y \geqslant -3$.

Задачи с решениями

8. Найдите допустимые значения переменной b в выражении $\dfrac{b}{\sqrt{b-5}}$.

Решение.

Выражение под корнем должно быть неотрицательным, поэтому $b-5 \geqslant 0$, $b \geqslant 5$. Кроме того, знаменатель должен быть отличен от нуля, поэтому $\sqrt{b-5} \neq 0$, $b-5 \neq 0$, $b \neq 5$. Таким образом, одновременно должно выполняться $b \geqslant 5$ и $b \neq 5$, следовательно, $b > 5$.

Ответ: $b > 5$.

9. Найдите количество целых чисел, входящих в область допустимых значений переменной x в выражении $\dfrac{3-\sqrt{10-x}}{\sqrt{x-3}}$.

Решение.

1-й способ.

В числителе под корнем стоит выражение $10-x$, поэтому $10-x \geqslant 0$, $x \leqslant 10$. В знаменателе под корнем стоит выражение $x-3$, поэтому $x-3 \geqslant 0$. Кроме того, знаменатель должен быть отличен от нуля, поэтому последнее неравенство должно быть строгим: $x-3>0$, $x>3$. Мы нашли область допустимых значений: $3<x \leqslant 10$. В неё входят целые числа 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 — всего 7 чисел.

2-й способ.

Покажем запись решения, если рассуждения выполнять устно.

$\begin{cases} 10-x \geqslant 0, \\ x-3>0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \leqslant 10, \\ x>3. \end{cases}$ Неравенство $3<x \leqslant 10$ имеет 7 целых решений: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Ответ: 7.

Алгебраические дроби

ⓘ *Немного полезной информации*

Алгебраическая дробь — это дробь, в числителе и знаменателе которой стоят алгебраические выражения. Все действия с алгебраическими дробями производятся по тем же правилам, что и с числовыми дробями.

Задачи с решениями

10. Упростите выражение $\left(\frac{1}{m-n}+\frac{1}{m+n}\right):\frac{m}{m^2-n^2}$.

Решение.

$$\left(\frac{1}{m-n}+\frac{1}{m+n}\right):\frac{m}{m^2-n^2}=\frac{m+n+m-n}{(m-n)(m+n)}\cdot\frac{m^2-n^2}{m}=$$

$$=\frac{2m}{m^2-n^2}\cdot\frac{m^2-n^2}{m}=\frac{2m\cdot(m^2-n^2)}{(m^2-n^2)\cdot m}=2.$$

Ответ: 2.

Степень с целым показателем

ⓘ *Немного полезной информации*

Пусть n — натуральное число. Тогда по определению

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ \text{множителей}}.$$

Например, $5^4=5\cdot5\cdot5\cdot5=625$; $(-3)^2=(-3)\cdot(-3)=9$; $(-2)^3=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=-8$; $7^1=7$; $0^8=0\cdot0\cdot\ldots\cdot0=0$.

Пусть $n=0$, $a\neq0$, тогда $a^0=1$.

Например, $5^0=1$, $(-45)^0=1$, $(0{,}7)^0=1$.

Запись 0^0 считается **не имеющей смысла**.

Пусть n — натуральное число, $a \neq 0$, тогда $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Например, $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{1}{64}$;

$(-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16}$.

Запись 0^{-n} считается **не имеющей смысла.**

Свойства степени с целым показателем:

$a^m a^n = a^{m+n}$; $\qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;

$(ab)^n = a^n b^n$; $\qquad (a^m)^n = a^{mn}$;

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$; $\qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$,

если $a \neq 0$ и $b \neq 0$.

Задачи с решениями

11. Упростите выражение $(2a)^{-5} \cdot (4a)^5$.

Решение.

$$(2a)^{-5} \cdot (4a)^5 = 2^{-5} \cdot a^{-5} \cdot 4^5 \cdot a^5 = \frac{1}{2^5} \cdot 4^5 \cdot a^{-5+5} =$$

$$= \left(\frac{4}{2}\right)^5 \cdot a^0 = 2^5 \cdot 1 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32.$$

Ответ: 32.

12. Упростите выражение $\frac{60a^{-6} \cdot a^3}{a^{-2}}$ и найдите его значение при $a = 15$.

Решение.

$\dfrac{60a^{-6} \cdot a^3}{a^{-2}} = 60a^{-6+3-(-2)} = 60a^{-1} = \dfrac{60}{a}$. При $a = 15$ получаем $\dfrac{60}{a} = \dfrac{60}{15} = 4$.

Ответ: 4.

13. Упростите выражение $\left(\dfrac{x}{3}\right)^{10} \cdot \left(\dfrac{x^2}{9}\right)^{-4}$ и найдите его значение при $x = 21$.

Решение.

$$\left(\frac{x}{3}\right)^{10} \cdot \left(\frac{x^2}{9}\right)^{-4} = \left(\frac{x}{3}\right)^{10} \cdot \left(\left(\frac{x}{3}\right)^{2}\right)^{-4} = \left(\frac{x}{3}\right)^{10} \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^{-8} = \left(\frac{x}{3}\right)^{2}.$$

При $x = 21$ получаем $\left(\dfrac{21}{3}\right)^2 = 7^2 = 49$.

Ответ: 49.

Тождества

Немного полезной информации

Тождество — равенство, справедливое при любых допустимых значениях входящих в него переменных.

Например, тождествами являются равенства

$$x^2 - 4 = (x+2)(x-2); \quad \frac{a+b}{a^2+2ab+b^2} = \frac{1}{a+b}.$$

С тождеством можно выполнять равносильные преобразования: прибавлять одно и то же число (или выражение) к обеим частям, вычитать из обеих частей одно и то же число (или выражение), умножать или делить обе части на одно и то же ненулевое число (или выражение).

Например, из формулы площади параллелограмма $S = ah$ (где a — основание, h — высота) можно выразить высоту h, разделив обе части равенства на длину основания a: $h = \dfrac{S}{a}$.

Пусть величины в обеих частях равенства неотрицательны. Тогда равносильными будут ещё два преобразования: возведение в квадрат обеих частей равенства и извлечение квадратного корня из обеих частей равенства.

Например, из формулы площади квадрата $S = a^2$ можно выразить длину a его стороны: $\sqrt{S} = \sqrt{a^2}$, откуда $a = \sqrt{S}$.

При применении равносильных преобразований к тождественному равенству мы снова получаем тождественное равенство.

14. Определите, какое из приведённых ниже выражений тождественно равно выражению $(a - b)(2 - c)$.

1) $-(b-a)(c-2)$	2) $(2-c)(b-a)$
3) $(c-2)(b-a)$	4) $-(a+b)(2+c)$

Решение.

Определим, какие из указанных выражений можно преобразовать к виду $(a - b)(2 - c)$.

1) $-(b-a)(c-2) = (a-b)(c-2) \neq (a-b)(2-c)$;

2) $(2-c)(b-a) = (b-a)(2-c) \neq (a-b)(2-c)$;

3) $(c-2)(b-a) = (2-c)(a-b) = (a-b)(2-c)$;

4) $-(a+b)(2+c) = (-a-b)(2+c) \neq (a-b)(2-c)$.

Таким образом, только выражение №3 тождественно равно выражению $(a - b)(2 - c)$.

Ответ: 3.

? *Варианты для самостоятельного решения*

Вариант 1

1. Упростите выражение $1 + (a+3)(b-2) + 2a - 3b$ и найдите его значение при $a = \sqrt{32}$, $b = \sqrt{2}$.

2. Сократите дробь $\dfrac{4a^2c^3}{8ac^2}$.

3. Найдите допустимые значения переменной x в выражении $\sqrt{x-2}$.

4. Упростите выражение $\dfrac{1}{x} + \dfrac{x-2y}{2xy}$ и найдите его значение при $x = \sqrt{2} + 1$, $y = \dfrac{1}{4}$.

5. Укажите выражение, тождественно равное выражению $(x-3y)(2a+b)$.

1) $(3y-x)(2a+b)$ 2) $(3y-x)(-2a+b)$

3) $(x-3y)(b+2a)$ 4) $(x-3y)(2a-b)$

Вариант 2

1. Упростите выражение $b^2 - 4b + 4 - (4 - b^2)$ и найдите его значение при $b = \sqrt{3} + 1$.

2. Сократите дробь $\dfrac{5n^3m^2}{25n^2m^3}$.

3. При каких значениях m выражение $\dfrac{m^2-4}{m-2}$ имеет смысл?

4. Упростите выражение $\left(1 - \dfrac{2ab}{a^2+b^2}\right) \cdot (a^2+b^2)$.

5. Укажите выражение, тождественно равное выражению $\dfrac{a-2}{a^2-4}$ при $a \neq \pm 2$.

1) $\dfrac{1}{2-a}$ 2) $\dfrac{a-2}{2}$ 3) $\dfrac{1}{a+2}$ 4) $\dfrac{1}{a-2}$

Вариант 3

1. Упростите выражение $b^2 - b\sqrt{5} + 9 - (9 + b^2)$ и найдите его значение при $b = \sqrt{20}$.

2. Сократите дробь $\dfrac{27a^3b^2}{3ab^2}$.

3. Найдите допустимые значения переменной x в выражении $\sqrt{x-4}$.

4. Упростите выражение $\dfrac{9x^2 + y^2}{3} + 2xy$.

5. Укажите выражение, тождественно равное выражению $(x - 2y)(5a - 7b)$.

1) $(x - 2y)(5a + 7b)$ 2) $(2y - x)(7b - 5a)$

3) $(x - 2y)(7b - 5a)$ 4) $(x - 2y)(5b - 7a)$

Вариант 4

1. Упростите выражение $(a - b)(b + a) - a^2$ и найдите его значение при $a = 1 + \sqrt{7}$, $b = \sqrt{11}$.

2. Сократите дробь $\dfrac{12y^7b^5}{4(yb^2)^7}$.

3. Найдите допустимые значения переменной x в выражении $\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{3-x}$.

4. Упростите выражение $\left(\frac{a^2+b^2}{a}+2b\right):\frac{a+b}{b}$ и найдите его значение при $b=\frac{5}{2}$, $a=\frac{1}{4}$.

5. Укажите выражение, тождественно равное выражению $64-a^2$.

1) $(8-a)(8+a)$ 2) $(a+8)(a-8)$

3) $(a+32)(a-32)$ 4) $(32-a)(32+a)$

Вариант 5

1. Упростите выражение $(x+y)x-x^2-2xy$ и найдите его значение при $x=\sqrt{12}$, $y=\sqrt{3}$.

2. Сократите дробь $\frac{8a^3ab^5}{12a^2b^3}$.

3. Найдите допустимые значения переменной a в выражении $\sqrt{3-a}$.

4. Упростите выражение $\left(1-\frac{4a}{a^2+4}\right)\cdot(a^2+4)$ и найдите его значение при $a=2-\sqrt{11}$.

5. Укажите выражение, тождественно равное выражению $\frac{2x-7}{5-3x}$.

1) $\frac{2x-7}{5+3x}$ 2) $\frac{7-2x}{5+3x}$ 3) $\frac{7-2x}{3x-5}$ 4) $\frac{2x-7}{3x-5}$

Вариант 6

1. Упростите выражение $x^2+x\sqrt{10}-25-(x^2-25)$ и найдите его значение при $x=\sqrt{40}$.

2. Сократите дробь $\dfrac{12x^3y^2}{(2xy)^3}$.

3. Найдите допустимые значения переменной x в выражении $\dfrac{1}{\sqrt{x+5}}$.

4. Упростите выражение $\dfrac{(a^2+8ab+16b^2)}{a+4b}\cdot(a-4b)$ и найдите его значение при $a=\sqrt{37}$, $b=\sqrt{2}$.

5. Укажите выражение, тождественно равное выражению $\dfrac{9-5x}{2x-3}$.

1) $\dfrac{5x-9}{3-2x}$ 2) $\dfrac{9+5x}{2x+3}$ 3) $-\dfrac{9+5x}{2x+3}$ 4) $-\dfrac{5x-9}{3-2x}$

Глава 3. Уравнения и неравенства

① *Немного полезной информации*

Уравнение — это равенство, содержащее неизвестную, значение которой надо найти.

Корень уравнения — это значение неизвестной, при котором данное уравнение обращается в верное равенство.

Решить уравнение — это значит найти все его корни или доказать, что данное уравнение корней не имеет.

Так, уравнение $3\cdot x=6$ имеет корень $x=2$, поскольку $3\cdot 2=6$ — верное равенство. При этом других корней нет.

Основные правила, с помощью которых можно решить уравнение:

- к обеим частям уравнения можно прибавлять одно и то же число или выражение;
- из обеих частей уравнения можно вычитать одно и то же число или выражение;
- можно переносить слагаемое из одной части уравнения в другую, при этом данное слагаемое меняет свой знак на противоположный;
- обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю.

Задачи с решениями

1. Решите уравнение $4 \cdot (x+5) = -16$.

Решение.

Разделим обе части уравнения на 4.

$x+5=-16:4,$

$x+5=-4,$

$x=-4-5,$

$x=-9.$

Ответ: -9.

2. Решите уравнение $6x-12=5x+4$.

Решение.

Перенесём $5x$ из правой части в левую, изменив знак на противоположный:

$6x-5x-12=4,$

$x-12=4.$

Перенесём (-12) из левой части уравнения в правую, изменив знак на противоположный:

$x = 4 + 12,$

$x = 16.$

Ответ: 16.

3. Решите уравнение $\dfrac{x+7}{3} = \dfrac{2x-3}{5}$.

Решение.

В верной пропорции произведение крайних членов равно произведению средних, поэтому

$5(x+7) = 3(2x-3),$

$5x + 35 = 6x - 9,$

$5x - 6x = -35 - 9,$

$-x = -44,$

$x = 44.$

Ответ: 44.

① *Немного полезной информации*

Равенство произведения нулю. Произведение равно нулю, если

- хотя бы один из сомножителей равен нулю;
- все другие множители при этом имеют смысл.

Например, произведение $(x-3)^2 \cdot \dfrac{x}{x-3}$ равно нулю только при $x = 0$, т. к. при $x = 3$ множитель $\dfrac{x}{x-3}$ не имеет смысла.

Задачи с решениями

4. Найдите корни уравнения $(x-7)(x+8) = 0$.

Решение.

$(x-7)(x+8) = 0,$

$x - 7 = 0$ или $x + 8 = 0,$

$x_1 = 7,$ $x_2 = -8.$

Ответ: $-8; 7.$

5. Найдите корни уравнения $\sqrt{x-8}(x+11) = 0.$

Решение.

$\sqrt{x-8}(x+11) = 0.$

$\sqrt{x-8} = 0$ или $x + 11 = 0,$

$x - 8 = 0,$

$x_1 = 8,$ $x_2 = -11.$

При $x_2 = -11$ множитель $\sqrt{x-8}$ не имеет смысла, так как подкоренное выражение $-11 - 8 = -19 < 0$. Поэтому заданное уравнение имеет один корень $x = 8$.

Ответ: 8.

Уравнения линейные и сводящиеся к линейным

Линейные уравнения — это уравнения вида $ax = b$, где x — неизвестное, a и b — заданные числа.

- Если $a = 0$ и $b \neq 0$, то уравнение имеет вид $0 \cdot x = b$, решений нет.
- Если $a = 0$ и $b = 0$, то уравнение имеет вид $0 \cdot x = 0$, x — любое число.
- Если $a \neq 0$ и b — любое число, то делим обе части уравнения на a, находя неизвестное: $x = \dfrac{b}{a}$.

Задачи с решениями

6. Найдите корень уравнения $-7x = 35.$

Решение.

Разделим обе части уравнения на коэффициент при неизвестном (-7).

$x = 35 : (-7)$,

$x = -5$.

Ответ: -5.

7. Решите уравнение $7x = 28 + 3x$.

Решение.

Перенесём $3x$ в левую часть и приведём подобные:

$7x - 3x = 28$,

$4x = 28$,

$x = 28 : 4$,

$x = 7$.

Ответ: 7.

8. Решите уравнение $-27x + 36 = 3 \cdot (56 - 9x)$.

Решение.

$-27x + 36 = 3 \cdot (56 - 9x)$,

$-27x + 36 = 168 - 27x$,

$-27x + 27x = 168 - 36$,

$0x = 132$, корней нет.

Ответ: корней нет.

9. Решите уравнение $(6 - x) + (12 - x) - (3 - 2x) = 15$.

Решение.

Раскроем скобки:

$6 - x + 12 - x - 3 + 2x = 15$.

Приведём подобные слагаемые:

$(-1 - 1 + 2)x + (6 + 12 - 3) = 15$,

$0x + 15 = 15$,

$0x = 15 - 15,$

$0x = 0$, x — любое число.

Ответ: x — любое число.

10. Решите уравнение

$$\frac{x+3}{4} - \frac{2x+1}{3} = -5.$$

Решение.

Умножим обе части уравнения на наименьший общий знаменатель дробей $\frac{x+3}{4}$ и $\frac{2x+1}{3}$, то есть на 12.

$$12 \cdot \left(\frac{x+3}{4} - \frac{2x+1}{3}\right) = 12 \cdot (-5),$$

$$12 \cdot \frac{x+3}{4} - 12 \cdot \frac{2x+1}{3} = -60,$$

$3 \cdot (x+3) - 4 \cdot (2x+1) = -60,$

$3x + 9 - 8x - 4 = -60,$

$3x - 8x = -60 - 9 + 4,$

$-5x = -65,$

$x = 13.$

Ответ: 13.

Квадратные уравнения

ⓘ *Немного полезной информации*

Квадратные уравнения — это уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x — переменная, a, b и c — некоторые числа, причём $a \neq 0$.

Неполные квадратные уравнения — квадратные уравнения, в которых $b = 0$ и/или $c = 0$. Решение неполных квадратных уравнений рассмотрим на примерах.

Задачи с решениями

11. Решите уравнение $4x^2 + x = 0$.

Решение.

В левой части вынесем общий множитель x за скобки:

$x(4x + 1) = 0,$

$x = 0,$ или $4x + 1 = 0,$

$4x = -1,$

$x = -0{,}25.$

$x_1 = 0;$ $x_2 = -0{,}25$ — корни исходного уравнения.

Ответ: 0; $-0{,}25$.

12. Решите уравнение $3x^2 = 81$.

Решение.

$x^2 = 27,$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{27},$

$x_1 = -3\sqrt{3},\ x_2 = 3\sqrt{3}.$

Ответ: $-3\sqrt{3}$, $3\sqrt{3}$.

13. Решите уравнение $5x^2 - 20 = 0$.

Решение.

1-й способ.

Разделим обе части уравнения на 5, получим $x^2 - 4 = 0$. Замечаем, что в левой части уравнения стоит разность квадратов, поэтому уравнение можно переписать в виде

$x^2 - 2^2 = 0,$

$(x + 2)(x - 2) = 0,$

$x + 2 = 0$ или $x - 2 = 0$,

$x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

2-й способ.

$5x^2 = 20$,

$x^2 = 20 : 5$,

$x^2 = 4$,

$x_{1,2} = \pm\sqrt{4}$,

$x_{1,2} = \pm 2$.

Ответ: -2; 2.

14. Решите уравнение $3x^2 + 8 = 0$.

Решение.

$3x^2 + 8 = 0$,

$3x^2 = -8$,

$x^2 = -\frac{8}{3}$.

Квадрат числа не может быть отрицательным, поэтому данное уравнение корней не имеет.

Ответ: корней нет.

15. Решите уравнение $-1{,}7x^2 = 0$.

Решение.

Разделим обе части уравнения на $-1{,}7$, получим уравнение $x^2 = 0$. Его корнем является только число 0.

Ответ: 0.

Решение квадратных уравнений общего вида

① *Немного полезной информации*

Рассмотрим квадратное уравнение общего вида, то есть $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$. Такие уравнения решаем по алгоритму:

- найти дискриминант D, вычисляемый по формуле $D = b^2 - 4ac$;
- по знаку дискриминанта определить число корней уравнения:
  — если $D < 0$, то уравнение корней не имеет (что уже можно писать в ответ, дальнейшие вычисления не требуются);
  — если $D = 0$, то уравнение имеет один корень $x = -\frac{b}{2a}$;
  — если $D > 0$, то уравнение имеет два корня:
  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, то есть
  $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$;
- найти корни;
- записать ответ.

Задачи с решениями

16. Решите уравнение $6x^2 - 13x + 2 = 0$.

Решение.

$$\left.\begin{array}{l} a = 6 \\ b = -13 \\ c = 2 \end{array}\right|$$

Вычислим дискриминант $D = b^2 - 4ac$.
$D = (-13)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 169 - 48 = 121$, $D > 0$,
поэтому исходное уравнение имеет два корня:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$$

$$x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{121}}{2 \cdot 6} = \frac{13 \pm 11}{12}, \text{ откуда}$$

$$x_1 = \frac{13 - 11}{12} = \frac{1}{6}, \quad x_2 = \frac{13 + 11}{12} = 2.$$

Ответ: $\frac{1}{6}$; 2.

17. Решите уравнение $9x^2 - 6x + 1 = 0$.

Решение.

$$\left.\begin{array}{l} a = 9 \\ b = -6 \\ c = 1 \end{array}\right|$$

Вычислим дискриминант $D = b^2 - 4ac$.
$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$. $D = 0$,
поэтому исходное уравнение имеет один корень:

$$x = -\frac{b}{2a}, \qquad x = \frac{6}{2 \cdot 9} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\frac{1}{3}$.

18. Решите уравнение $3x^2 - 4x + 3 = 0$.

Решение.

$$\left.\begin{array}{l} a = 3 \\ b = -4 \\ c = 3 \end{array}\right|$$

Вычислим дискриминант $D = b^2 - 4ac$.
$D = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 16 - 36 = -20$. $D < 0$,
поэтому исходное уравнение корней не имеет.

Ответ: корней нет.

Приведённое квадратное уравнение. Теорема Виета

Немного полезной информации

Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ называется **приведённым**, если $a = 1$.

Пусть $x^2 + px + q = 0$ — приведённое квадратное уравнение, где p и q — некоторые числа. Если x_1 и x_2— корни уравнения, то справедливы формулы (теорема Виета)

$$x_1 + x_2 = -p,$$
$$x_1 \cdot x_2 = q.$$

Справедливо и обратное утверждение. Если x_1 и x_2 — некоторые числа, при этом $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$, то уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни x_1 и x_2, причём других корней нет (теорема, обратная теореме Виета).

Задачи с решениями

19. Известно, что уравнение $x^2 + 9x - 10 = 0$ имеет корни. Найдите сумму и произведение корней этого уравнения.

Решение.

По теореме Виета

$x_1 + x_2 = -9,$

$x_1 \cdot x_2 = -10.$

Значит, $x_1 = -10$, $x_2 = 1$.

Ответ: $-10; 1$.

20. Составьте квадратное уравнение, корнями которого были бы числа 3 и -5.

Решение.

По теореме Виета

$x_1 + x_2 = -2,$

$x_1 \cdot x_2 = -15.$

Напишем приведённое квадратное уравнение, в котором второй коэффициент $p = 2$, а свободный член $q = -15$:
$x^2 + 2x - 15 = 0.$

По теореме, обратной теореме Виета, числа 3 и -5 являются корнями составленного уравнения.

Ответ: $x^2 + 2x - 15 = 0.$

Координатная прямая

① *Немного полезной информации*

Иногда числа обозначают на координатной прямой. В математике принято числовую прямую направлять слева направо. То число, которое правее, то и большее. Например, на рисунке 5 видно, что $b > a$.

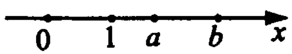


Рис. 5.

Рассмотрим несколько задач, в которых встречается координатная прямая.

Задачи с решениями **21.** На координатной прямой отмечены числа a и b (см. рис. 6). Какое из следующих чисел наибольшее?

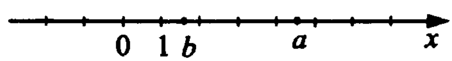


Рис. 6.

1) a 2) b 3) $3b$ 4) $a + 2$

5. Зак. № 181

Решение.

Заметим, что $1 < b < 2$, $4 < a < 5$ (см. рис. 7).

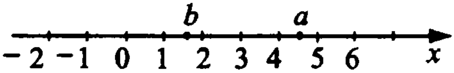


Рис. 7.

Тогда, $3 < 3b < 6$, $6 < a + 2 < 7$, то есть $3b < 6 < a + 2$. Наибольшее число — это $(a + 2)$.

Ответ: 4.

22. На координатной прямой отмечены точки M, N, K и L (см. рис. 8). Одна из них соответствует числу $\sqrt{500}$. Какая это точка?

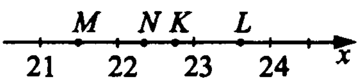


Рис. 8.

1) M 2) N 3) K 4) L

Решение.

Заметим, что $21^2 = 441$, $22^2 = 484$, $23^2 = 529$, $24^2 = 576$, $(\sqrt{500})^2 = 500$. При этом $484 < 500 < 529$, а значит, $22 < \sqrt{500} < 23$. На координатной прямой между отметками 22 и 23 лежат точки N и K. При этом $N < 22{,}5$; $K > 22{,}5$. Заметим, что $22{,}5 = \dfrac{45}{2}$, $\left(\dfrac{45}{2}\right)^2 = \dfrac{2025}{4}$. Сравним числа $\dfrac{2025}{4}$ и 500. Очевидно, что $500 \cdot 4 = 2000$, $\dfrac{2025}{4} > \dfrac{2000}{4}$, тогда

$\frac{45}{2} > \sqrt{500}$, $\sqrt{500} < 22{,}5$. Значит, $\sqrt{500}$ соответствует точке N.

Ответ: 2.

Неравенства

Немного полезной информации

Линейным неравенством называется неравенство вида $ax + b > 0$, $ax + b < 0$, $ax + b \geqslant 0$ или $ax + b \leqslant 0$, где x — переменная, a и b — некоторые числа, причём $a \neq 0$.

Для решения неравенства $ax + b > 0$ сначала перенесём слагаемое b в правую часть: $ax > -b$. Далее разделим обе части неравенства на a. При этом следует учитывать знак a:

- если $a > 0$, то при делении неравенство сохраняет знак: $x > -\frac{b}{a}$, то есть $x \in \left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$;
- если $a < 0$, то при делении неравенство меняет знак на противоположный: $x < -\frac{b}{a}$, то есть $x \in \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$.

Аналогично решаются неравенства $ax + b < 0$, $ax + b \geqslant 0$, $ax + b \leqslant 0$.

Задачи с решениями

23. Решите неравенство $5x - 3 < 7x - 17$.

Решение.

Перенесём в левую часть все слагаемые, содержащие переменную, а в правую — свободные члены:

$5x - 7x < 3 - 17$,

6. Зак. № 181

$-2x < -14.$

Разделим обе части на (-2), знак неравенства при этом изменится на противоположный:

$x > 7$ (см. рис. 9).

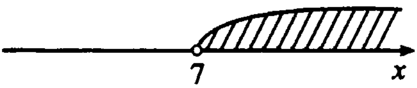


Рис. 9.

Ответ: $(7; +\infty)$.

Немного полезной информации

Квадратное неравенство — это неравенство вида $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geqslant 0$ или $ax^2 + bx + c \leqslant 0$, где x — переменная, a, b и c — некоторые числа, причём $a \neq 0$.

Покажем решение квадратных неравенств на примерах.

Задачи с решениями

24. Решите неравенство $2x^2 + 11x - 6 > 0$.

Решение.

1. Решим уравнение $2x^2 + 11x - 6 = 0$.

$a = 2$	$D = b^2 - 4ac.$
$b = 11$	$D = 11^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) = 121 + 48 = 169,\ D > 0,$
$c = -6$	$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a};\ x_{1,2} = \dfrac{-11 \pm \sqrt{169}}{2 \cdot 2} = \dfrac{-11 \pm 13}{4};$

$$x_1 = \frac{-11 - 13}{4} = -6;\ x_2 = \frac{-11 + 13}{4} = \frac{2}{4} = 0{,}5.$$

2. Графиком функции $y = 2x^2 + 11x - 6$ является парабола, ветви которой направлены вверх ($a = 2 > 0$). Парабола пересекает ось Ox в двух точках, абсциссы которых 0,5 и −6 (см. рис. 10).

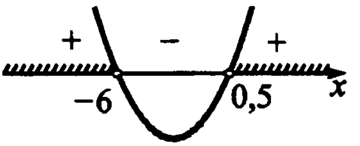


Рис. 10.

3. Вывод: данное неравенство выполняется, если $x < -6$ и $x > 0{,}5$.

Ответ: $(-\infty; -6) \cup (0{,}5; +\infty)$.

Покажем, как можно записывать решение квадратного неравенства, если вид графика анализировать устно.

25. Решите неравенство $x^2 - 11x + 24 < 0$.

Решение.

Решим уравнение $x^2 - 11x + 24 = 0$.

$p = -11$ $q = 24$	По теореме, обратной теореме Виета, имеем $x_1 + x_2 = 11,$ $x_1 \cdot x_2 = 24.$ Следовательно, $x_1 = 3,\ x_2 = 8.$

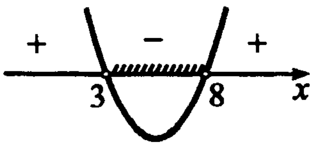


Рис. 11.

Вывод: данное неравенство выполняется, если $3 < x < 8$ (см. рис. 11).

Ответ: $(3; 8)$.

26. Решите неравенство $-3x^2+16x-5 \geqslant 0$. В ответе укажите наибольшее целое решение неравенства.

Решение.

Решим уравнение $3x^2-16x+5=0$.

$$\left.\begin{array}{l} a=3 \\ b=-16 \\ c=5 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} D=b^2-4ac. \\ D=(-16)^2-4\cdot 3\cdot 5=196,\ D>0. \\ x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a};\ x_{1,2}=\dfrac{16\pm\sqrt{196}}{2\cdot 3}=\dfrac{16\pm 14}{6}; \end{array}$$

$$x_1=\frac{16-14}{6}=\frac{1}{3};\ x_2=\frac{16+14}{6}=5.$$

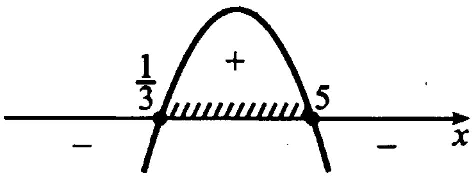


Рис. 12.

$\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 5$ (см. рис. 12). Наибольшее целое решение неравенства равно 5.

Ответ: 5.

27. Решите неравенство $x^2-x+5>0$.

Решение.

Решим уравнение $x^2-x+5=0$.

$$\left.\begin{array}{l} a=1 \\ b=-1 \\ c=5 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} D=b^2-4ac. \\ D=(-1)^2-4\cdot 1\cdot 5=1-20=-19,\ D<0. \end{array}$$

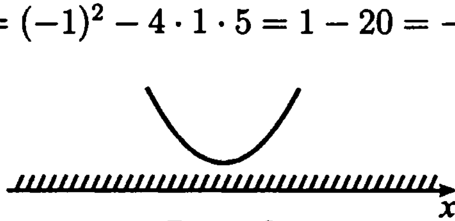


Рис. 13.

Уравнение $x^2 - x + 5 = 0$ корней не имеет, значит, график функции $y = x^2 - x + 5$ не пересекает ось Ox (см. рис. 13). Учитывая, что $a = 1 > 0$, неравенство $x^2 - x + 5 > 0$ выполняется при любом значении x.

Ответ: $(-\infty; \infty)$.

Заметим, что если коэффициент при x^2 отрицательный ($a < 0$), то обе части неравенства можно умножить на (-1), изменив знак неравенства на противоположный, и тогда ветви параболы будут направлены вверх.

28. Решите неравенство $-4x^2 + 12x - 9 \geqslant 0$.

Решение.

$-4x^2 + 12x - 9 \geqslant 0 \,\Big|\cdot(-1)$

$4x^2 - 12x + 9 \leqslant 0.$

Решим уравнение $4x^2 - 12x + 9 = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} a = 4 \\ b = -12 \\ c = 9 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} D = b^2 - 4ac. \\ D = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 144 - 144 = 0, \\ x = -\dfrac{b}{2a}, x = \dfrac{12}{2 \cdot 4} = 1{,}5. \end{array}$$

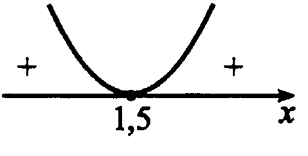


Рис. 14.

Учитывая, что $a = 4 > 0$, неравенство $4x^2 - 12x + 9 \leqslant 0$ выполняется только при $x = 1{,}5$ (см. рис. 14).

Ответ: 1,5.

Покажем решение неравенств **методом интервалов**.

29. Решите неравенство $x^2 - 4x - 21 \geqslant 0$.

Решение.

1) Разложим левую часть неравенства на множители. Для этого решим уравнение $x^2 - 4x - 21 = 0$. $x = 7$ и $x = -3$ — корни уравнения. Неравенство примет вид $(x+3)(x-7) \geqslant 0$.

2) Нанесём числа -3 и 7 на прямую. Учитывая, что неравенство нестрогое, закрасим точки (см. рис. 15).

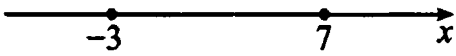


Рис. 15.

3) Так как $a = 1 > 0$, то на крайнем правом промежутке поставим знак «+» (можно из любого промежутка взять число и подставить в левую часть неравенства, например, если $x = 10$, получим $100 - 40 - 21 = 39 > 0$) (см. рис. 16).

Рис. 16.

4) Так как множители $(x+3)$ и $(x-7)$ в нечётной степени (в первой), то на остальных промежутках знаки чередуем и рисуем «змейку» (см. рис. 17).

Рис. 17.

5) Левая часть неравенства больше или равна 0, значит, выделяем промежутки со знаком «+» (см. рис. 18).

6) Делаем вывод: $x \leqslant -3$, $x \geqslant 7$.

Ответ: $(-\infty; -3] \cup [7; +\infty)$.

Рис. 18.

30. Решите неравенство $7x^2 - 12x + 5 < 0$.

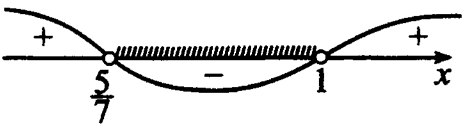
Решение.

$7x^2 - 12x + 5 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{5}{7}$ — корни уравнения.

$$7(x-1)\left(x - \frac{5}{7}\right) < 0 \;\Big|\; : 7$$

$$(x-1)\left(x - \frac{5}{7}\right) < 0.$$

$\dfrac{5}{7} < x < 1$ (см. рис. 19).



Ответ: $\left(\dfrac{5}{7}; 1\right)$.

Рис. 19.

31. Решите неравенство $-x^2 - 8x + 9 > 0$.

Решение.

Умножим обе части неравенства на (-1).

$x^2 + 8x - 9 < 0$,

$x^2 + 8x - 9 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = -9$ — корни уравнения.

$(x+9)(x-1) < 0$.

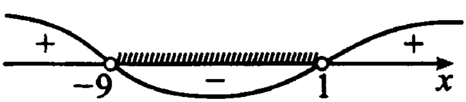


Рис. 20.

$-9 < x < 1$ (см. рис. 20).

Ответ: $(-9; 1)$.

32. Решите неравенство $x^2 - 6x + 9 > 0$.

Решение.

Заметим, что левая часть неравенства — полный квадрат, то есть $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$. Неравенство примет вид $(x - 3)^2 > 0$, отсюда решение этого неравенства — любое число, кроме $x = 3$, так как неравенство строгое.

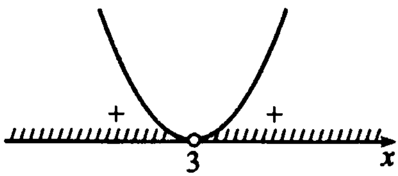


Рис. 21.

$x < 3$ и $x > 3$ (см. рис. 21).

Ответ: $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

33. Решите неравенство $\dfrac{3x - 6}{x + 4} \geqslant 0$.

Решение.

Нули числителя: $3x - 6 = 0$, $x = 2$.

Нули знаменателя: $x + 4 = 0$, $x = -4$.

Рис. 22.

$x < -4$, $x \geqslant 2$ (см. рис. 22).

Ответ: $(-\infty; -4) \cup [2; \infty)$.

Системы неравенств

Немного полезной информации

Система обозначается знаком $\left\{\vphantom{\dfrac{a}{b}}\right.$. **Решением системы** неравенств являются те значения, которые одновременно являются решением всех неравенств системы. При решении системы неравенств на координатной прямой заштриховывается промежуток, который соответствует ответу.

Как и в предыдущих случаях, границы промежутка обозначаются белыми «выколотыми» точками, если они не входят в сам промежуток. В противном случае они обозначаются чёрными «сплошными» точками.

Задачи с решениями

34. Решите систему неравенств $\begin{cases} 3x + 5 > 0, \\ 3x - 9 \leqslant 0. \end{cases}$ На какой из координатных прямых изображено множество решений системы (см. рис. 23)?

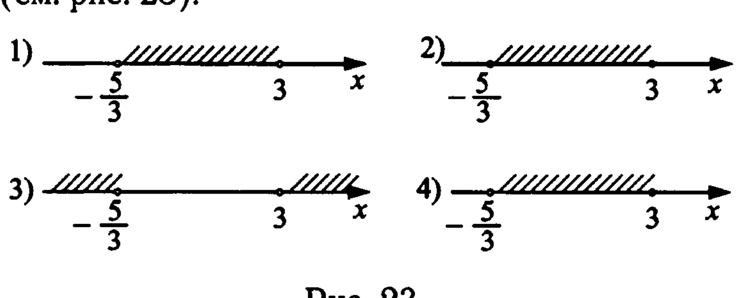


Рис. 23.

Решение.

1) Решим первое неравенство: $3x > -5$, $x > -\dfrac{5}{3}$.

2) Решим второе неравенство: $3x - 9 \leqslant 0$, $3x \leqslant 9$, $x \leqslant 3$.

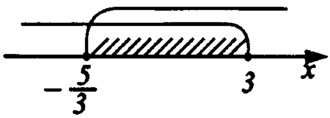


Рис. 24.

3) На координатной прямой (см. рис. 24) обозначены дугами решения каждого из неравенств. Заштрихуем их общую часть. При этом обратим внимание, что число 3 входит в решение, а $-\dfrac{5}{3}$ — нет. Из предложенных в условии подходит координатная прямая под номером 4.

Ответ: 4.

Варианты для самостоятельного решения

Вариант 1

1. Найдите корень уравнения $2 - 3x = 4(1 - x)$.

2. Найдите корень уравнения $\sqrt{x+2}(2x - 5) = 0$. Если их несколько, то в ответе укажите сумму корней.

3. Найдите сумму корней уравнения $x^2 - 2x - 15 = 0$.

4. Решите неравенство $3(4 + 2x) > 24$. В ответе укажите наименьшее целое решение этого неравенства.

5. Решите неравенство $2(x - 4)(x + 5) < 0$, в ответе укажите длину промежутка, являющегося решением данного неравенства.

6. На координатной прямой отмечены числа a и b (см. рис. 25). Какое из чисел наименьшее?

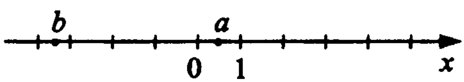


Рис. 25.

1) $-a$ 2) b 3) $a-b$ 4) $b-a$

Вариант 2

1. Найдите корень уравнения $7-x=2(1-3x)$.

2. Найдите корень уравнения $\sqrt{x+4}(5x-10)=0$. Если их несколько, то в ответе укажите сумму корней.

3. Найдите сумму корней уравнения $x^2-4x-21=0$.

4. Решите неравенство $14+4(3-x)\leqslant -2(5-x)$, в ответе укажите наименьшее целое решение неравенства.

5. Решите неравенство $3(x+1)(4-x)>0$, в ответе укажите наибольшее целое решение неравенства.

6. На координатной прямой отмечены числа a и b (см. рис. 26). Какое из чисел наибольшее?

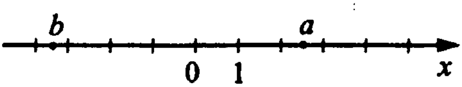


Рис. 26.

1) $a+1$ 2) $a-b$ 3) $8b$ 4) $-5b$

Вариант 3

1. Найдите корень уравнения $1-5x=3(7-x)$.

2. Найдите корень уравнения $\sqrt{x+7}(3x-6)=0$. Если их несколько, то в ответе укажите сумму корней.

3. Найдите произведение корней уравнения $x^2-2x-8=0$.

4. Решите систему неравенств $\begin{cases} 2x+15>0, \\ 7x-14>0. \end{cases}$ На какой из координатных прямых изображено множество решений системы (см. рис. 27)?

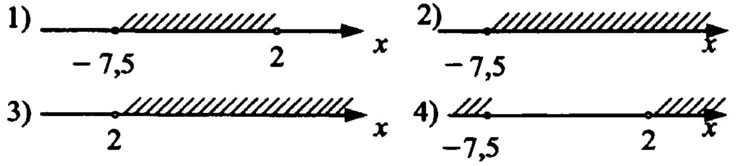


Рис. 27.

5. Решите неравенство $5(x-6)(x+7)<0$, в ответе укажите длину промежутка, являющегося решением данного неравенства.

6. На координатной прямой отмечено число a (см. рис. 28). Какое из утверждений относительно этого числа является верным?

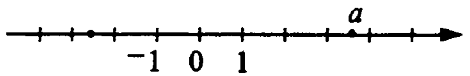


Рис. 28.

1) $a-3<0$ 2) $2a-5<0$ 3) $2-a>0$ 4) $4-a>0$

Вариант 4

1. Найдите корень уравнения $13x-6=2(5+7x)$.

2. Найдите корень уравнения $\sqrt{2x-5}(x-1)=0$. Если их несколько, то в ответе укажите сумму корней.

3. Найдите произведение корней уравнения $2x^2-5x+2=0$.

4. Решите неравенство $(x-9)(3-x)>0$, в ответе укажите наименьшее целое решение неравенства.

5. Решите систему неравенств $\begin{cases} 7x+105 \geqslant 0, \\ 8x-32<0. \end{cases}$ На какой из координатных прямых изображено множество решений системы (см. рис. 29)?

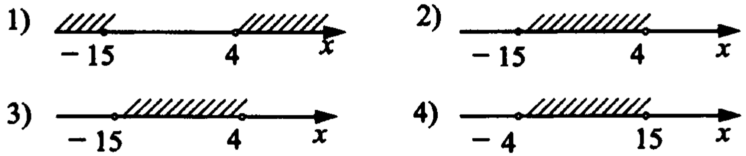


Рис. 29.

6. На координатной прямой отмечены числа a и b (см. рис. 30). Какое из утверждений относительно этих чисел является верным?

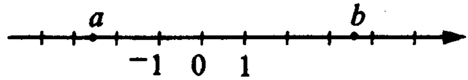


Рис. 30.

1) $b+a<0$ 2) $b+8a>0$ 3) $5-a>b$ 4) $2a-b>0$

Вариант 5

1. Найдите корень уравнения $5-2x=3(10+x)$.

2. Найдите корень уравнения $\sqrt{x+3}(5x-6)=0$. Если их несколько, то в ответе укажите сумму корней.

3. Найдите произведение корней уравнения $3x^2-13x+12=0$.

4. Решите неравенство $3(x-2)-2>4-x$, в ответе укажите наименьшее целое решение неравенства.

5. Решите систему неравенств $\begin{cases} 2x-5<0, \\ 7x+28>0. \end{cases}$ На какой из координатных прямых изображено множество решений системы (см. рис. 31)?

6. Решите неравенство $x^2+3x-10\leqslant 0$, в ответе укажите количество целочисленных решений неравенства.

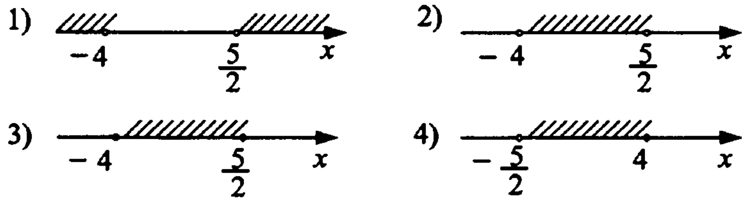


Рис. 31.

Вариант 6

1. Найдите корень уравнения $6+2x=7(x+3)$.

2. Найдите корень уравнения $\sqrt{x-9}(2x-3)=0$. Если их несколько, то в ответе укажите сумму корней.

3. Найдите произведение корней уравнения $x^2-2x-15=0$.

4. Решите неравенство $2(x+3)-11<3(4x+15)$, в ответе укажите наименьшее целое решение неравенства.

5. Решите неравенство $(8-4x)(x+2)\geqslant 0$, в ответе укажите наибольшее целое решение неравенства.

6. Решение какой из представленных систем неравенств соответствует рисунку 32?

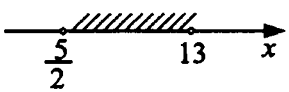


Рис. 32.

1) $\begin{cases} x<\dfrac{5}{2}, \\ x>13; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+13>0, \\ x-\dfrac{5}{2}<0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x-5<0, \\ x-13<0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x-5>0, \\ x-13<0. \end{cases}$

Глава 4. Числовые последовательности

ⓘ *Немного полезной информации*

- Любые записанные подряд n чисел образуют **числовую последовательность**. Её обозначают $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$.
  Например:
  7, 10, 10, 13 — числовая последовательность, где $a_1 = 7$, $a_2 = 10$, $a_3 = 10$, $a_4 = 13$.
- Иногда последовательности задают, указывая её **первый член** и **формулу**, позволяющие найти любой другой член последовательности, зная предыдущие члены. Такой способ задания последовательности называют **рекуррентным**.

Задачи с решениями

1. Найдите пятый член последовательности c_n, если $c_1 = -6$, $c_{n+1} = c_n + 3$.

Решение.

Последовательность задана рекуррентным способом, поэтому по очереди найдём её члены со второго по пятый.

$c_2 = c_1 + 3 = -6 + 3 = -3,$

$c_3 = c_2 + 3 = -3 + 3 = 0,$

$c_4 = c_3 + 3 = 0 + 3 = 3,$

$c_5 = c_4 + 3 = 3 + 3 = 6.$

Ответ: 6.

Арифметическая прогрессия

① *Немного полезной информации*

- Пусть дана бесконечная числовая последовательность a_1, $a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$. Если равенство $a_{n+1} = a_n + d$ выполняется для всех натуральных n, то такая последовательность называется **арифметической прогрессией**.

- Число $\boldsymbol{d = a_{n+1} - a_n}$ называют **разностью арифметической прогрессии**.

  Например, натуральный ряд чисел 1, 2, 3, ... является арифметической прогрессией. Разность этой прогрессии $d = 3 - 2 = 1$.

- $\boldsymbol{a_n = a_1 + d \cdot (n-1)}$ — формула n-го члена арифметической прогрессии.

Задачи с решениями

2. Дана арифметическая прогрессия, в которой $a_3 = 7$, $a_4 = 12$. Найдите разность этой прогрессии.

Решение.

$d = a_4 - a_3 = 12 - 7 = 5.$

Ответ: 5.

3. Найдите десятый член арифметической прогрессии, если известно, что $a_1 = -2$ и $d = -3$.

Решение.

По формуле $a_n = a_1 + d(n-1)$ найдём

$a_{10} = -2 + (-3)(10-1) = -29.$

Ответ: -29.

4. Найдите первый член арифметической прогрессии, если $d = 5$, $a_9 = 12$.

Решение.

$a_9 = a_1 + 5(9 - 1)$,
$12 = a_1 + 5 \cdot 8$,
$a_1 = 12 - 5 \cdot 8 = 12 - 40 = -28$.

Ответ: -28.

5. Запишите первые пять членов арифметической прогрессии, в которой

а) $a_1 = 3, d = 4$.

б) $a_1 = 12, d = -2$.

Решение.

а) $a_2 = a_1 + d = 3 + 4 = 7$,

$a_3 = a_2 + d = 7 + 4 = 11$,

$a_4 = a_3 + d = 11 + 4 = 15$,

$a_5 = a_4 + d = 15 + 4 = 19$.

б) $a_2 = a_1 + d = 12 + (-2) = 10$,

$a_3 = a_2 + d = 10 + (-2) = 8$,

$a_4 = a_3 + d = 8 + (-2) = 6$,

$a_5 = a_4 + d = 6 + (-2) = 4$.

Ответ: а) 3, 7, 11, 15, 19;
б) 12, 10, 8, 6, 4.

Свойства арифметической прогрессии

ⓘ *Немного полезной информации*

- Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому двух соседних с ним членов: $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

- Сумма n первых членов арифметической прогрессии (S_n):

  $$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

  или $S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$.

Задачи с решениями

6. Задана арифметическая прогрессия $49, 2x, 51, \ldots$. Найдите x.

Решение.

Так как каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому двух соседних с ним членов, то

$$2x = \frac{49+51}{2}, \quad 2x = 50, \quad x = 25.$$

Ответ: 25.

7. Найдите сумму пяти первых членов арифметической прогрессии, у которой $a_1 = 7$, $a_2 = 10$, $a_3 = 13$.

Решение.

Найдём разность арифметической прогрессии $d = a_2 - a_1$, $d = 10 - 7 = 3$.

Найдём a_4 и a_5: $a_4 = a_3 + d$, $a_4 = 13 + 3 = 16$;

$$a_5 = a_4 + d,\ a_5 = 16 + 3 = 19.$$

$S_5 = 7 + 10 + 13 + 16 + 19 = 65$.

Ответ: 65.

8. Дана арифметическая прогрессия: 5, 11, 17, … . Найдите сумму семи её первых членов.

Решение.

Зная, что $a_1 = 5$ и $a_2 = 11$, найдём разность арифметической прогрессии $d = a_2 - a_1$, $d = 11 - 5 = 6$.

По формуле $a_n = a_1 + d(n-1)$ найдём a_7.
$a_7 = 5 + 6(7-1) = 5 + 6 \cdot 6 = 5 + 36 = 41$.

Сумму первых семи членов арифметической прогрессии найдём по формуле $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

Так как $a_1 = 5$, $a_7 = 41$, $n = 7$, то получим

$$S_7 = \frac{5+41}{2} \cdot 7 = \frac{46}{2} \cdot 7 = 23 \cdot 7 = 161.$$

Ответ: 161.

9. Последовательность задана формулой $a_{n+1} = a_n + 2$ и условием $a_1 = 5$. Найдите сумму шести первых членов этой последовательности.

Решение.

По определению числовая последовательность, заданная формулой $a_{n+1} = a_n + 2$, является арифметической прогрессией с разностью 2.

Сумму шести первых членов арифметической прогрессии найдём по формуле

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

Имеем $a_1 = 5$, $n = 6$ и $d = 2$. Следовательно,

$$S_6 = \frac{2 \cdot 5 + 2 \cdot (6-1)}{2} \cdot 6 = \frac{10 + 10}{2} \cdot 6 = 60.$$

Ответ: 60.

Геометрическая прогрессия

① *Немного полезной информации*

- Пусть дана бесконечная числовая последовательность $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$. Если выполняется равенство $\boldsymbol{b_{n+1} = b_n \cdot q}$ для всех натуральных n и $q \neq 0$, то такая последовательность называется **геометрической прогрессией**.

- Число $\boldsymbol{q = \dfrac{b_{n+1}}{b_n}}$ называют **знаменателем** геометрической прогрессии.

  Например, последовательность чисел $1, 3, 9, 27, 81, \ldots$ является геометрической прогрессией. Знаменатель прогрессии $q = 9 : 3 = 3$.

- $\boldsymbol{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}}$ — формула n-ого члена геометрической прогрессии.

Задачи с решениями

10. Дана геометрическая прогрессия $2, 6, 18, \ldots$. Найдите знаменатель прогрессии.

Решение.

$b_1 = 2,\ \ b_2 = 6,\ \ q = \dfrac{b_2}{b_1},\ \ q = \dfrac{6}{2} = 3.$

Ответ: 3.

11. Найдите пятый член геометрической прогрессии, если $b_1 = 128$ и $q = \dfrac{1}{2}$.

Решение.

По формуле $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ найдём

$$b_5 = 128 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-1} = 128 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 128 \cdot \frac{1}{16} = 8.$$

Ответ: 8.

12. Запишите пять первых членов геометрической прогрессии, если заданы b_1 и q.

а) $b_1 = 4,\ \ q = 2$;

б) $b_1 = -4,\ \ q = 2$;

в) $b_1 = 4,\ \ q = -2$;

г) $b_1 = -4,\ \ q = -2$.

Решение.

а) Если $b_1 = 4,\ \ q = 2$, то $b_2 = 4 \cdot 2 = 8,\ \ b_3 = 4 \cdot 2^2 = 16,$ $b_4 = 4 \cdot 2^3 = 32,\ \ b_5 = 4 \cdot 2^4 = 64.$

б) Если $b_1 = -4,\ \ q = 2$, то $b_2 = -4 \cdot 2 = -8,$ $b_3 = -4 \cdot 2^2 = -16,\ \ b_4 = -4 \cdot 2^3 = -32,\ \ b_5 = -4 \cdot 2^4 = -64.$

в) Если $b_1 = 4,\ \ q = -2$, то $b_2 = 4 \cdot (-2) = -8,$ $b_3 = 4 \cdot (-2)^2 = 16, b_4 = 4 \cdot (-2)^3 = -32, b_5 = 4 \cdot (-2)^4 = 64.$

г) Если $b_1 = -4$, $q = -2$, то $b_2 = -4 \cdot (-2) = 8$,
$b_3 = -4 \cdot (-2)^2 = -16$, $b_4 = -4 \cdot (-2)^3 = 32$,
$b_5 = -4 \cdot (-2)^4 = -64$.

Ответ: а) 4, 8, 16, 32, 64;
б) −4, −8, −16, −32, −64;
в) 4, −8, 16, −32, 64;
г) −4, 8, −16, 32, −64.

13. Найдите пятый член геометрической прогрессии, если $b_1 = \frac{1}{3}$, $b_4 = 9$.

Решение.

Так как $b_4 = b_1 \cdot q^3$, то $9 = \frac{1}{3} \cdot q^3$, $q^3 = 27$, $q = 3$.

$b_5 = b_4 \cdot q = 9 \cdot 3 = 27$.

Ответ: 27.

ⓘ *Немного полезной информации*

Свойства геометрической прогрессии

- Числовая последовательность, члены которой отличны от нуля, является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда квадрат каждого её члена, кроме первого, равен произведению предыдущего и последующего членов. $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}, n \geqslant 2$.

- Сумма n первых членов геометрической прогрессии $\boldsymbol{S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}}$.

Задачи с решениями

14. Задана геометрическая прогрессия: $2, x, 18, \dots$. Найдите x.

Решение.

Так как последовательность $2,\ x,\ 18, \dots$ по условию является геометрической прогрессией, то по свойству геометрической прогрессии запишем

$x^2 = 2 \cdot 18,$

$x^2 = 36,$

$x_1 = 6,\ x_2 = -6.$

Ответ: 6; –6.

15. Дана геометрическая прогрессия $3,\ 6,\ 12, \dots$. Найдите сумму шести её первых членов.

Решение.

По условию $b_1 = 3,\ b_2 = 6$, знаменатель геометрической прогрессии $q = b_2 : b_1,\ q = 6 : 3 = 2.$

По формуле $S_6 = \dfrac{b_1(q^6 - 1)}{q - 1}$ находим

$$S_6 = \frac{3(2^6 - 1)}{2 - 1} = 3 \cdot (64 - 1) = 3 \cdot 63 = 189.$$

Ответ: 189.

16. Геометрическая прогрессия задана формулой n-ого члена: $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$. Найдите сумму пяти её членов.

Решение.

В этой прогрессии $b_1 = 2 \cdot 3^{1-1} = 2$, $b_2 = 2 \cdot 3^{2-1} = 6$, $q = b_2 : b_1 = 6 : 2 = 3$, $n = 5$.

По формуле $S_5 = \dfrac{b_1(q^5 - 1)}{q - 1}$ находим

$$S_5 = \frac{2(3^5 - 1)}{3 - 1} = \frac{2 \cdot (243 - 1)}{2} = 242.$$

Ответ: 242.

17. В геометрической прогрессии со знаменателем $q = \dfrac{1}{2}$ сумма первых четырёх членов равна 60. Найдите первый член этой прогрессии.

Решение.

Воспользуемся формулой $S_4 = \dfrac{b_1(q^4 - 1)}{q - 1}$:

$$\frac{b_1 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^4 - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = 60, \quad \frac{b_1 \cdot \left(\frac{1}{16} - 1\right)}{-\frac{1}{2}} = 60, \quad b_1 \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{2}{1} = 60,$$

$$b_1 = \frac{60 \cdot 16}{15 \cdot 2} = 32.$$

Ответ: 32.

❓ *Варианты для самостоятельного решения*

Вариант 1

1. В арифметической прогрессии найдите a_9, если $a_1 = -4$, $d = 5$.

2. Последовательность задана формулой $a_{n+1} = a_n - 3$ и условием $a_1 = 7$. Найдите сумму первых десяти членов этой последовательности.

3. Дана геометрическая прогрессия 2; 6; 18; … . Найдите сумму первых шести членов этой прогрессии.

Вариант 2

1. Дана арифметическая прогрессия 9; 11; 13; … . Найдите сумму первых шести её членов.

2. В геометрической прогрессии заданы $b_1 = 48$ и $q = \frac{1}{2}$. Найдите пятый член прогрессии.

3. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, заданной формулой n-ого члена $b_n = \frac{2}{3} \cdot 5^n$.

Вариант 3

1. Найдите первый член арифметической прогрессии, если $d = -4$, $a_7 = -21$.

2. Найдите сумму первых пяти членов геометрической прогрессии $-1; 3; -9; \ldots$.

3. Найдите разность арифметической прогрессии, заданной формулой n-ого члена $a_n = -2n + 8$.

Вариант 4

1. Найдите сумму десяти первых членов арифметической прогрессии, если известно, что $a_1 = -14$, $a_{10} = -6$.

2. Дана геометрическая прогрессия -3; 6; -12; $\ldots$. Найдите шестой член прогрессии.

3. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, заданной формулой n-ого члена $b_n = -8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Вариант 5

1. В арифметической прогрессии найдите a_5, если $a_2 = 5$, $d = 3$.

2. Дана геометрическая прогрессия 3; -6; 12; $\ldots$. Найдите сумму первых семи её членов.

3. Составьте формулу n-ого члена арифметической прогрессии 2; 7; 12; 17; $\ldots$.

Вариант 6

1. Дана арифметическая прогрессия 18; 14; 10; $\ldots$. Какое число стоит в этой последовательности на 25-ом месте?

2. Геометрическая прогрессия задана условиями $b_1 = 5$, $b_{n+1} = 3b_n$. Найдите сумму первых пяти её членов.

3. В геометрической прогрессии $b_5 = 48$, $b_7 = 192$. Найдите b_6.

Глава 5. Графики и функции

Понятие графика. Простейшие задачи

Немного полезной информации

Областью определения функции $y = f(x)$ называется множество всех значений аргумента x, для которых выражение $f(x)$ определено (имеет смысл). Например, область определения функций $y = x^2 + x + 1$ и $y = \sqrt[3]{x}$ — все действительные числа, область определения функции $y = \dfrac{1}{x-1}$ — все действительные числа, кроме 1 (так как при $x = 1$ знаменатель дроби $\dfrac{1}{x-1}$ равен нулю и выражение не имеет смысла), область определения функции $y = \sqrt{x}$ — все неотрицательные числа (то есть $x \geqslant 0$).

Каждая функция, заданная при помощи формулы, имеет в прямоугольной системе координат Oxy свой график. **Графиком функции** $y = f(x)$ называют множество точек координатной плоскости Oxy вида $(x; f(x))$, где x — любое число из области определения функции.

Часто встречаются задания, в которых необходимо установить соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают. Для решения таких заданий следует

- определить общий вид графика, задаваемого каждой формулой;
- если среди предложенных вариантов содержится несколько графиков нужного типа, проверить соответствие формул и графиков по точкам.

Рассмотрим графики некоторых элементарных функций.

Прямая

График функций, заданных формулой вида $y = kx + b$, — прямая.

Рассмотрим разные случаи расположения прямой в зависимости от значений коэффициентов k и b в формуле (см. рис. 33).

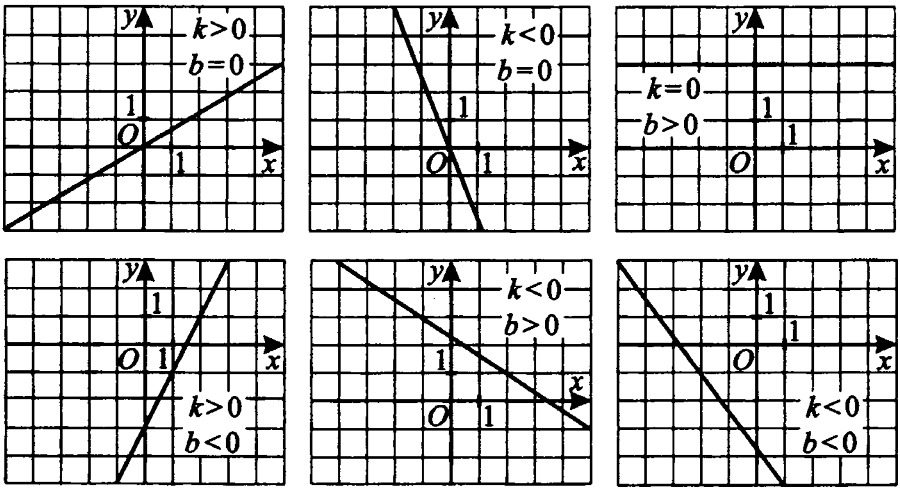


Рис. 33.

Коэффициент k определяет угол наклона прямой. При $k = 0$ функция имеет вид $y = b$, её график параллелен оси абсцисс (оси Ox). При $k > 0$ прямая уходит вправо-вверх: при возрастании x значение функции $y = kx + b$ также возрастает. При $k < 0$ прямая уходит вправо-вниз: при возрастании x значение функции $y = kx + b$ убывает.

Коэффициент b определяет, в каком месте график пересечёт ось ординат (ось Oy). При $b = 0$ получаем функцию

$y = kx$. Её график — прямая, проходящая через начало координат. Действительно, точка $(0;0)$ принадлежит графику функции $y = kx$, так как $0 = k \cdot 0$. При $b > 0$ функция пересекает ось ординат выше оси абсцисс, а при $b < 0$ — ниже оси абсцисс. Действительно, точке пересечения графика и оси ординат соответствует точка графика с абсциссой $x = 0$, то есть точка $(0;b)$. В зависимости от знака b эта точка находится выше или ниже оси абсцисс.

Задачи с решениями

1. Установите соответствие между графиками функций (см. рис. 34) и формулами, которые их задают.

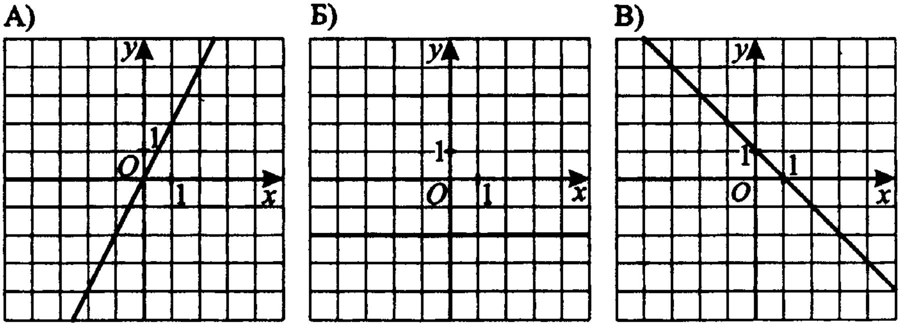


Рис. 34.

1) $y = -2x + 1$ 2) $y = 2x$ 3) $y = -x + 1$ 4) $y = -2$

Решение. Все три графика — прямые, то есть заданы формулами вида $y = kx + b$.

Для графика А выполняется $b = 0$, так как прямая проходит через начало координат. Из предложенных вариантов ему соответствует формула $y = 2x$ (2).

График Б параллелен оси абсцисс, поэтому $k = 0$, из предло-

женных вариантов ему соответствует формула $y = -2$ (4).
Для В выполняется $k < 0$ и $b > 0$, то есть ему могут соответствовать формулы $y = -2x+1$ (1) или $y = -x+1$ (3). Найдём подходящую формулу по двум точкам. График В проходит через точки плоскости с координатами $(0; 1)$ и $(1; 0)$. Подставим в формулы значения координат этих точек: для формулы 1 получаем при $x = 0$, $y = 0 + 1 = 1$; при $x = 1$ $y = -2 + 1 = -1$, ей график соответствовать не может. Для формулы 3 получаем: $x = 0$, $y = 0 + 1 = 1$; при $x = 1$ $y = -1 + 1 = 0$, следовательно, график В соответствует формуле 3.

Ответ:

А	Б	В
2	4	3

Замечание. Любая прямая задаётся двумя точками, поэтому для проверки соответствия формулы и графика достаточно подставить в формулу координаты двух точек графика (при условии, что формула задаёт прямую и график является тоже прямой).

Парабола

График функции, заданной формулой вида
$y = ax^2 + bx + c$ или $y = a(x - m)^2 + n$, где $a \neq 0$, — парабола. Вершина параболы находится в точке с абсциссой, равной $m = -\dfrac{b}{2a}$, и в зависимости от знака параметра a и знака выражения $D = b^2 - 4ac$ график может принимать различный вид (см. рис. 35).

При $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, при $a < 0$ — вниз. Знак дискриминанта D показывает, пересекает ли па-

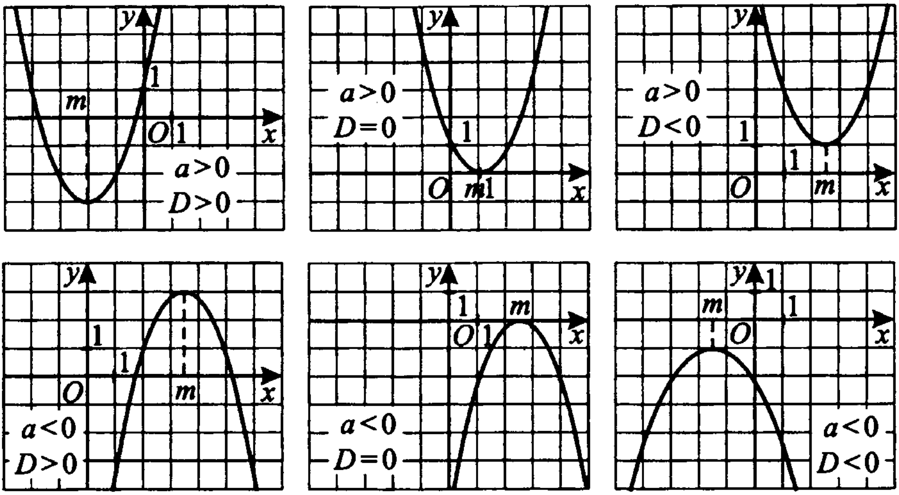


Рис. 35.

рабола ось абсцисс. При $D > 0$ парабола пересекает ось абсцисс дважды, при $D = 0$ — один раз (вершина параболы лежит на оси абсцисс). При $D < 0$ парабола не пересекает ось абсцисс.

Задачи с решениями

2. Установите соответствие между графиками функций (см. рис. 36) и формулами, которые их задают.

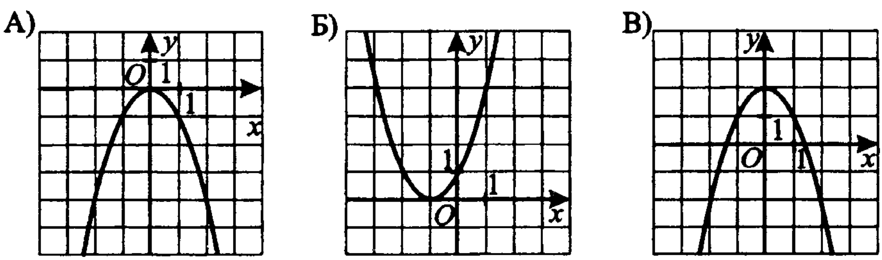


Рис. 36.

1) $y = -x^2 + 2$ 2) $y = (x+1)^2$

3) $y = (x-1)^2$ 4) $y = -x^2$

Решение. Все три графика — параболы, то есть заданы формулами вида $y = ax^2 + bx + x$ или $y = a(x-m)^2 + n$.

На графике А ветви параболы направлены вниз, значит, параметр $a < 0$. Этому условию отвечают формулы 1 и 4, но так как график А проходит через точку плоскости с координатами $(0; 0)$, а график, заданный формулой 1, через неё не проходит (при $x = 0$ $y = 2 \neq 0$), то графику А соответствует формула 4.

На графике Б ветви параболы направлены вверх, $a > 0$, и он может быть задан формулой 2 или 3, но так как вершина параболы лежит на оси Ox в точке с абсциссой $x = -1$, то $y(-1) = 0$. Формула 3 не подходит, так как для неё $y(-1) = (-1-1)^2 \neq 0$. Графику Б соответствует формула 2: $y = (x+1)^2$.

На графике В ветви параболы направлены вниз, $a < 0$, и ему могут соответствовать формулы 1 и 4. Так как $y(0) = 2$, то формула 4 не подходит (в ней $y(0) = -0^2 = 0$), следовательно, график В задаёт формула 1.

Ответ:

А	Б	В
4	2	1

Замечание. Для параболы при проверке соответствия графика одной из нескольких формул удобно использовать сравнение координат вершины параболы, изображённой на графике, и координат вершин парабол, задаваемых формулами. Если эти координаты для двух формул совпадают, следует выбирать ещё одну дополнительную точку графика для проверки.

Немного полезной информации

Гипербола

График функции, заданной формулой вида $y = \frac{k}{x}$ или $y = \frac{k}{x-m} + n$, $k \neq 0$, — гипербола. Область определения функции, заданной формулой $y = \frac{k}{x}$, — все действительные числа, кроме 0, значит, график этой функции не пересекает ось ординат. Аналогично график, заданный $y = \frac{k}{x-m} + n$, не будет проходить ни через одну точку плоскости с абсциссой m (то есть не пересекает вертикальную прямую $x = m$).

В зависимости от значений, которые принимают параметры k, гипербола $y = \frac{k}{x}$ может быть по-разному расположена на декартовой плоскости. При $k > 0$ гипербола расположена в I и III четвертях, при $k < 0$ — во II и IV (см. рис. 37).

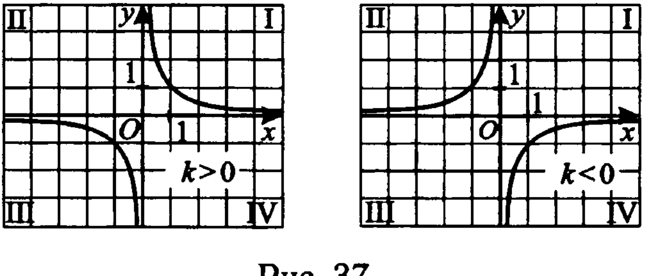


Рис. 37.

При наличии параметров m и n график гиперболы получается из графика $y = \dfrac{k}{x}$ параллельным переносом вправо вдоль оси Ox на m и вверх вдоль оси Oy на n (см. рис. 38).

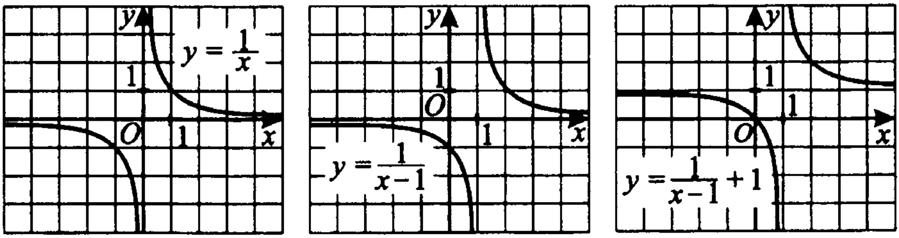


Рис. 38.

Задачи с решениями

3. Установите соответствие между графиками функций (см. рис. 39) и формулами, которые их задают.

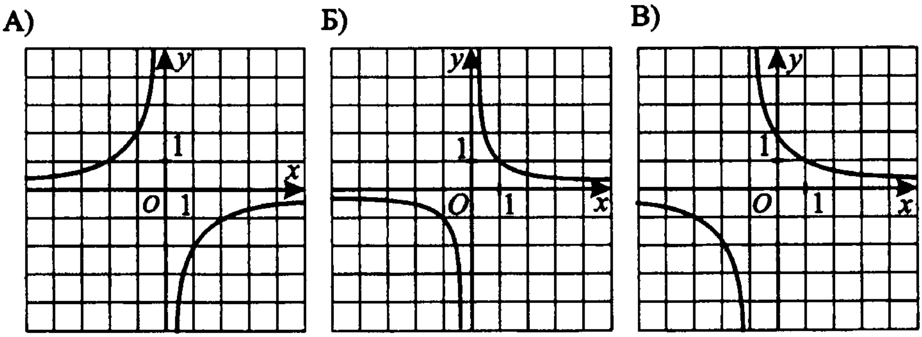


Рис. 39.

1) $y = -\dfrac{2}{x}$ 2) $y = \dfrac{2}{x+1}$ 3) $y = \dfrac{1}{x}$ 4) $y = -\dfrac{1}{x}$

Решение. Все три графика — гиперболы, то есть заданы формулами вида $y = \dfrac{k}{x}$ или $y = \dfrac{k}{x-m} + n$.

Для графика А значение параметра $k < 0$, значит, он может быть задан формулами 1 или 4. Проверим точку $(1; -2)$, через которую проходит этот график. Формула номер 1: $y(1) = -\frac{2}{1} = -2$ — подходит. Формула номер 4: $y(1) = -\frac{1}{1} = -1 \neq -2$ — не подходит. Следовательно, из предложенных формул графику А соответствует формула 1.

Для графика Б выполняется $k > 0$, значит, он может быть задан формулами 2 или 3. Проверим точку $(-1; -1)$, через которую проходит этот график (точку $(1; 1)$ брать нецелесообразно, так как график В также проходит через неё). Формула номер 2: $y(-1) = \frac{2}{-1+1}$ — не определено, поэтому не подходит. Формула номер 3: $y(-1) = \frac{1}{-1} = -1$ — подходит. Следовательно, из предложенных формул графику Б соответствует формула 3.

Для графика В выполняется $k > 0$, значит, он может быть задан формулами 2 или 3. Так как из них неиспользованной осталась только формула 2, то она и задаёт этот график.

Ответ:

А	Б	В
1	3	2

Немного полезной информации

График функции корня

Рассмотрим графики функций квадратного и кубического корней. Областью определения функции, заданной формулой

$y = \sqrt{x}$, является $x \geqslant 0$. Областью определения функции, заданной формулой $y = \sqrt[3]{x}$, являются все действительные числа (см. рис. 40).

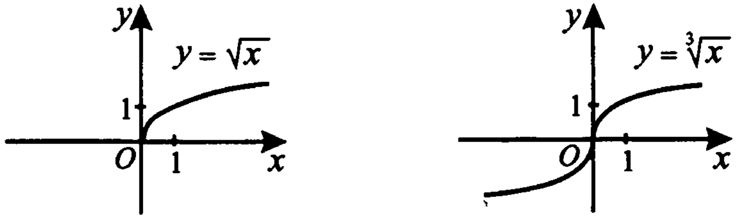


Рис. 40.

График функции, заданной формулой вида $y = \sqrt{x - p} + q$, получается из графика, заданного формулой $y = \sqrt{x}$, параллельным переносом вправо вдоль оси Ox на p и вверх вдоль оси Oy на q. Например, график функции $y = \sqrt{x - 2} + 1$ получается из графика $y = \sqrt{x}$ параллельным переносом вправо на 2 деления и на 1 вверх (см. рис. 41).

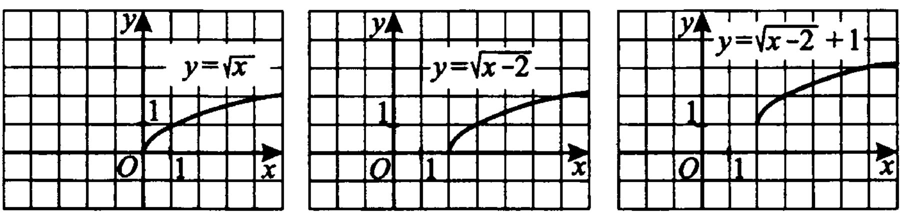


Рис. 41.

Задачи с решениями

4. Установите соответствие между графиками функций (см. рис. 42) и формулами, которые их задают.

1) $y = \sqrt{x}$ 2) $y = \sqrt{x} - 3$

3) $y = \sqrt{x + 3}$ 4) $y = \sqrt{x + 1}$

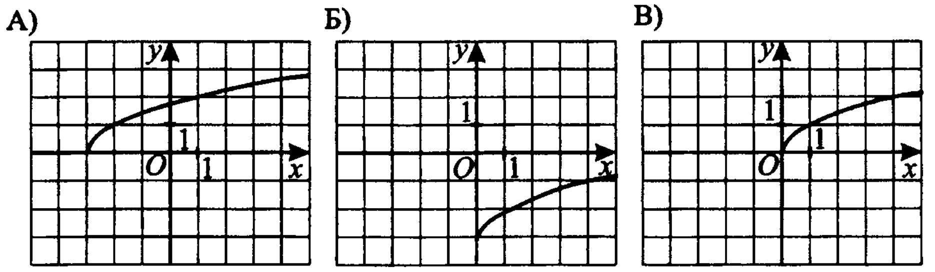


Рис. 42.

Решение. Заметим, что графики А – В представляют собой смещённые графики функции $y = \sqrt{x}$, а потому задаются формулами вида $y = \sqrt{x-p} + q$.

График А проходит через $(-3; 0)$ и задаётся формулой $y = \sqrt{x+3}$, так как из предложенных только она удовлетворяет соотношению $y(-3) = 0$.

График Б проходит через $(0; -3)$ и задаётся формулой $y = \sqrt{x} - 3$, так как из предложенных только она удовлетворяет соотношению $y(0) = -3$.

График В проходит через $(0; 0)$ и задаётся формулой $y = \sqrt{x}$, так как из предложенных только она удовлетворяет соотношению $y(0) = 0$.

Ответ:

А	Б	В
3	2	1

Замечание. Вообще-то говоря, подстановка координат одной точки в формулы может оказаться недостаточной (несколько формул превратятся в верные равенства). Тогда надо подставить координаты ещё одной точки.

Рассмотрим теперь задания, содержащие графики разных видов.

Задачи с решениями

5. Установите соответствие между графиками функций (см. рис. 43) и формулами, которые их задают.

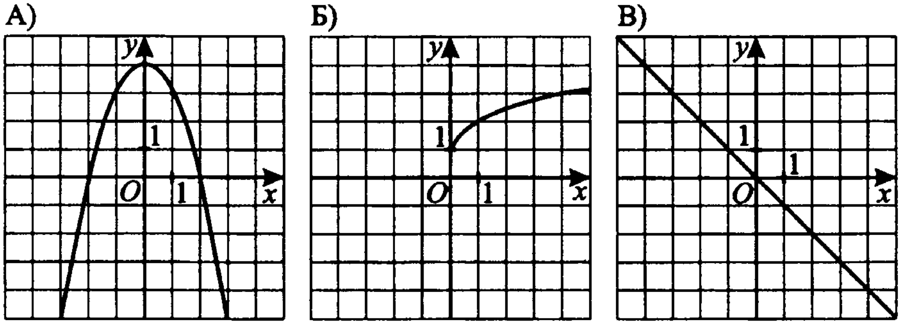


Рис. 43.

1) $y = -x^2 + 4$ 2) $y = -x^2 + 1$

3) $y = \sqrt{x} + 1$ 4) $y = -x$

Решение.

График А — парабола, ветви которой направлены вниз. Из предложенных формул только 1 и 2 задают такую параболу. Вершина параболы, заданной формулой 1, лежит в точке с координатами $(0; 4)$, вершина параболы, заданной формулой 2, — в точке с координатами $(0; 1)$. Вершина параболы А лежит в точке $(0; 4)$, значит, график А задаётся формулой 1.

График Б — смещённый график квадратного корня. Из предложенных вариантов ему может соответствовать только формула 3.

График В — прямая. Из предложенных ему соответствует формула 4.

Ответ:

А	Б	В
1	3	4

6. Установите соответствие между графиками функций (см. рис. 44) и формулами, которые их задают.

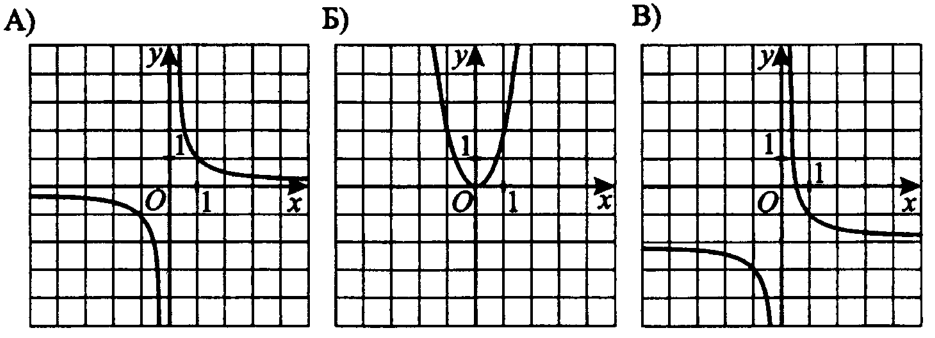


Рис. 44.

1) $y = \dfrac{1}{x} - 2$ 2) $y = x^2$ 3) $y = \dfrac{1}{x}$ 4) $y = 2x^2$

Решение. График А — гипербола, задаваемая формулой вида $y = \dfrac{k}{x}$, $k > 0$. Значит, А соответствует формула 3.

График Б — парабола, ветви которой направлены вверх. Такую параболу задают формулы 2 или 4. Координаты вершины параболы Б $(0; 0)$ и координаты вершин парабол, задаваемых формулами, совпадают, поэтому рассмотрим дополнительно точку графика Б с координатами $(1; 2)$ и подставим значения её координат в формулы. Для формулы 2 при $x = 1$ $y = 1 \neq 2$, следовательно, график Б задаётся формулой 4.

График В — гипербола. Из оставшихся формул подходит только формула 1.

Ответ:

А	Б	В
3	4	1

Пересечение графиков

Немного полезной информации

Для того чтобы решить задания, в которых требуется найти координаты точки пересечения графиков (заданных уравнениями), удовлетворяющей определённому условию, нужно

- составить и решить систему уравнений, задающих графики, тем самым найдя все их точки пересечения;
- определить условия, отличающие искомую точку от других (например, знак абсциссы), выбрать среди всех найденных точек пересечения искомую.

Задачи с решениями

7. На рисунке 45 изображены графики функций $y = x^2 - 3$ и $y = x - 1$. Вычислите координаты точки B.

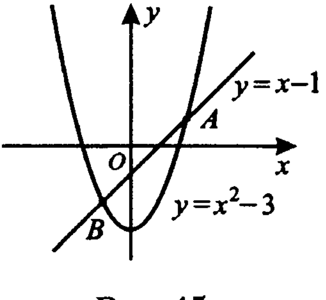


Рис. 45.

Решение.

Решим систему уравнений $\begin{cases} y = x^2 - 3, \\ y = x - 1. \end{cases}$

$x^2 - 3 = x - 1; x^2 - x - 2 = 0; x_1 = 2, x_2 = -1; y_1 = 1, y_2 = -2.$

Таким образом, решениями системы являются точки $(2; 1)$ и $(-1; -2)$.

Точка B расположена слева от оси Oy, точка A — справа, следовательно, абсцисса точки B — отрицательное число, в то время как абсцисса точки A — положительное.

Среди найденных точек пересечения выбираем точку с отрицательной абсциссой: $(-1; -2)$.

Ответ: $(-1; -2)$.

8. На рисунке 46 изображены графики функций $y = 2x + 5$ и $y = 4 - (x + 2)^2$. Вычислите координаты точки A.

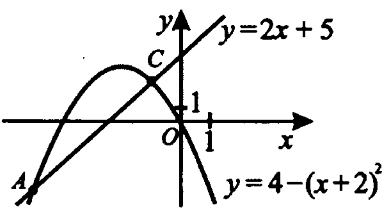


Рис. 46.

Решение.

а) Решим систему уравнений $\begin{cases} y = 2x + 5, \\ y = 4 - (x + 2)^2. \end{cases}$

$2x + 5 = 4 - (x + 2)^2; 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 = 0; x^2 + 6x + 5 = 0;$
$x_1 = -5, x_2 = -1; y_1 = -5, y_2 = 3.$

Таким образом, решениями системы являются точки $(-5; -5)$ и $(-1; 3)$.

б) Точка A расположена ниже оси Ox, точка C — выше, следовательно, ордината точки A — отрицательное число, ордината точки C — положительное.

в) Среди найденных точек пересечения выбираем точку с отрицательной ординатой: $(-5; -5)$.

Ответ: $(-5; -5)$.

Замечание. Можно было бы рассуждать иначе: точка A левее точки C, поэтому абсцисса точки A меньше абсциссы точки C. Из точек $(-5; -5)$ и $(-1; 3)$ абсцисса точки $(-5; -5)$ меньше, поэтому точка $(-5; -5)$ является искомой.

❓ *Варианты для самостоятельного решения*

Вариант 1

1. Установите соответствие между графиками функций (см. рис. 47) и формулами, которые их задают.

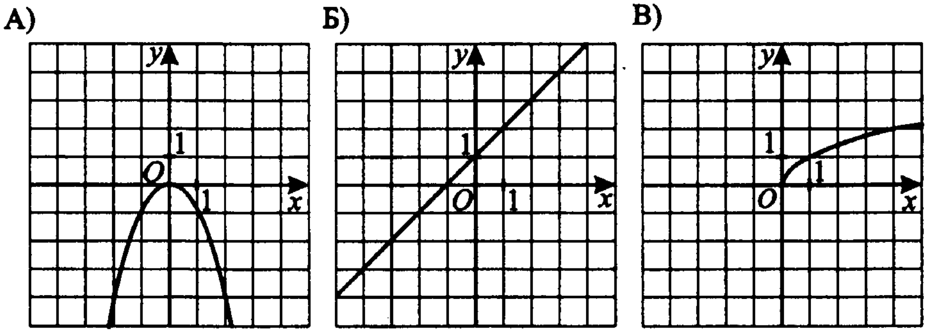


Рис. 47.

1) $y = x + 1$ 2) $y = x - 1$ 3) $y = \sqrt{x}$ 4) $y = -x^2$

Ответ:

А	Б	В

2. На рисунке 48 изображены графики функций $y = -x - 3$ и $y = -x^2 + 3$. Вычислите координаты точки A.

Ответ: _____

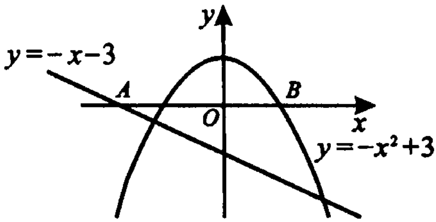


Рис. 48.

3. Установите соответствие между графиками функций (см. рис. 49) и формулами, которые их задают.

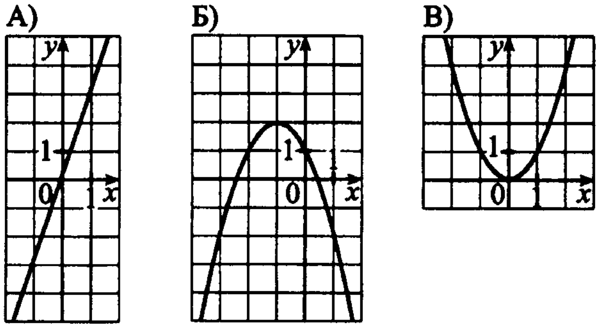


Рис. 49.

1) $y = \dfrac{2}{x}$ 2) $y = x^2$ 3) $y = -(x+1)^2 + 2$ 4) $y = 3x$

Ответ:

А	Б	В

4. Используя рисунок 50, решите систему уравнений $\begin{cases} y = -3x + 4, \\ y = 2x - 6. \end{cases}$

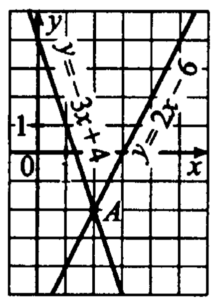


Рис. 50.

Вариант 2

1. Установите соответствие между графиками функций (см. рис. 51) и формулами, которые их задают.

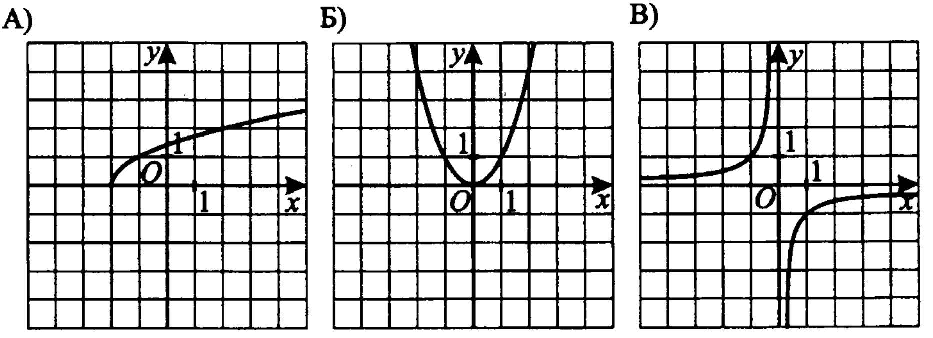


Рис. 51.

1) $y = -\dfrac{1}{x}$ 2) $y = \sqrt{x+2}$ 3) $y = \dfrac{1}{x}$ 4) $y = x^2$

Ответ:

А	Б	В

2. На рисунке 52 изображены графики функций $y = \dfrac{1}{2}x + 2$ и $y = -\dfrac{1}{4}x^2 + 4$. Вычислите координаты точки B.

Ответ: _____

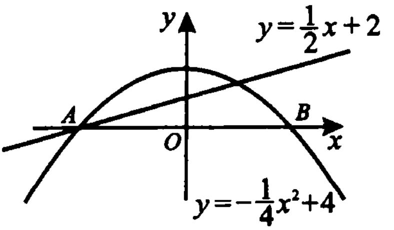


Рис. 52.

3. Какой формулой задаётся функция, график которой изображён на рисунке 53?

1) $y = -(x+1)^2 + 1$
2) $y = (x-1)^2 + 1$
3) $y = 2(x-1)^2 + 1$
4) $y = -2(x+1)^2 + 1$

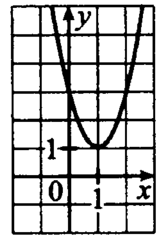


Рис. 53.

4. На рисунке 54 изображены графики функций $y = \dfrac{1}{x}$ и $y = 4x$. Вычислите координаты точки B.

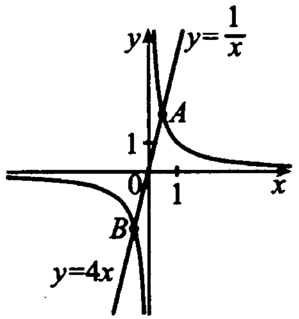


Рис. 54.

Вариант 3

1. Установите соответствие между графиками функций (см. рис. 55) и формулами, которые их задают.

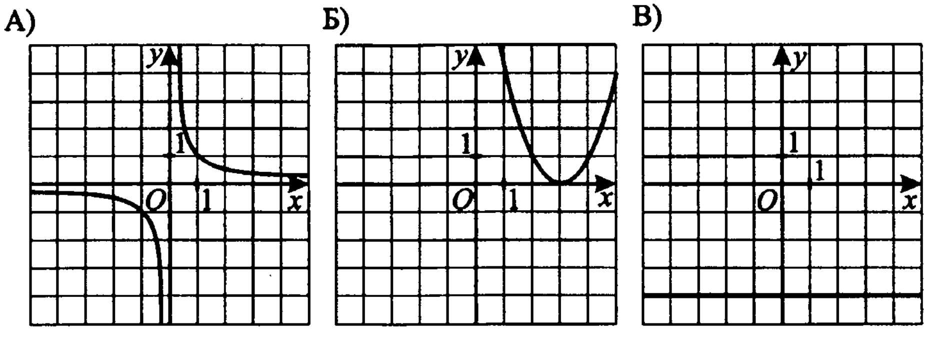


Рис. 55.

1) $y = (x-3)^2$ 2) $y = x^2 + 3$ 3) $y = \dfrac{1}{x}$ 4) $y = -4$

Ответ:

А	Б	В

2. На рисунке 56 изображены графики функций $y = x^2 - 5$ и $y = 2x - 2$. Вычислите координаты точки A.

Ответ: _____

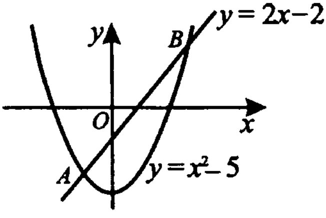


Рис. 56.

3. Какой из графиков является графиком функции $y = \dfrac{2}{x-1} + 3$ (см. рис. 57)?

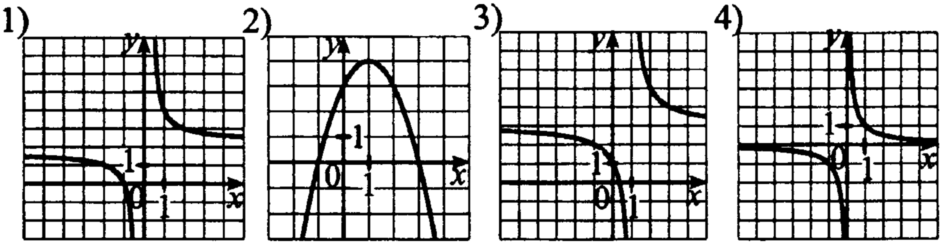


Рис. 57.

4. На рисунке 58 изображены графики функций $y = \dfrac{3}{x}$ и $y = \dfrac{2}{x-1}$. Найдите координаты точки A.

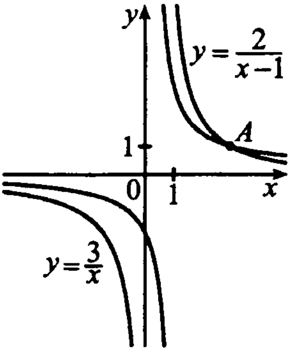


Рис. 58.

Вариант 4

1. Установите соответствие между графиками функций (см. рис. 59) и формулами, которые их задают.

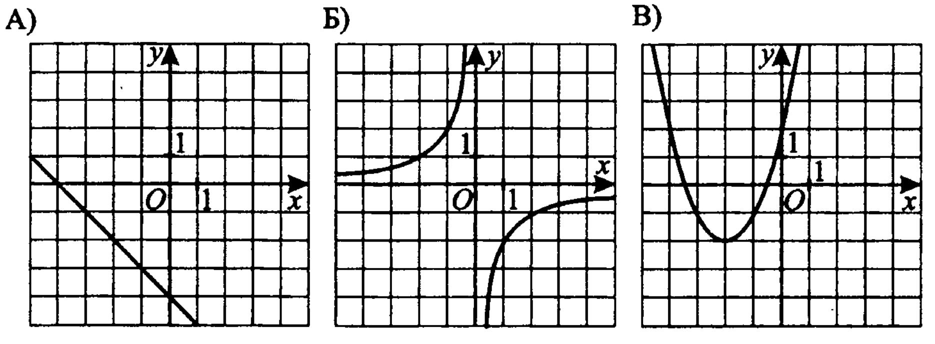


Рис. 59.

1) $y = -\dfrac{1}{x}$

2) $y = (x+2)^2 - 2$

3) $y = -\dfrac{2}{x}$

4) $y = -x - 4$

Ответ:

А	Б	В

2. На рисунке 60 изображены графики функций $y = \frac{1}{4}x^2 - 4$ и $y = -\frac{1}{2}x + 2$. Вычислите координаты точки B.

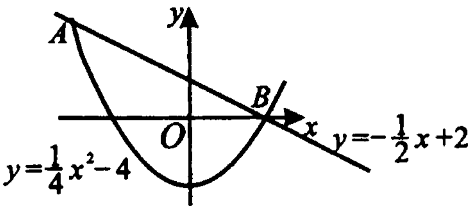


Рис. 60.

Ответ: _____

3. Установите соответствие между графиками функций (см. рис. 61) и формулами, которые из задают.

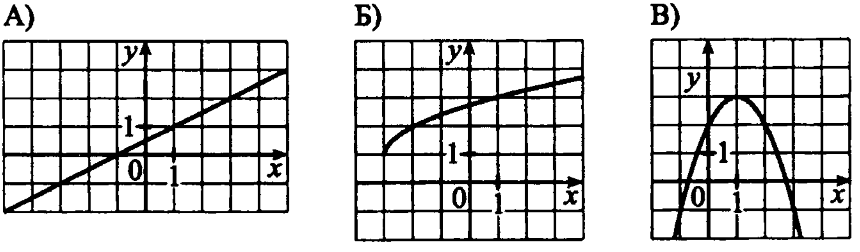


Рис. 61.

1) $y = \sqrt{x+3} + 1$

2) $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

3) $y = -x^2 + 2x + 2$

4) $y = (x-1)^2 + 2$

Ответ:

А	Б	В

4. На рисунке 62 изображены графики функций $y = 2x + 1$, $y = 4 - x$, $y = \frac{3}{2}x$. Вычислите координаты точки C.

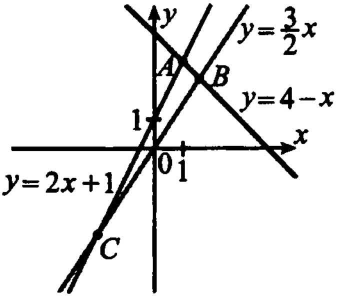


Рис. 62.

Вариант 5

1. Установите соответствие между графиками функций (см. рис. 63) и формулами, которые их задают.

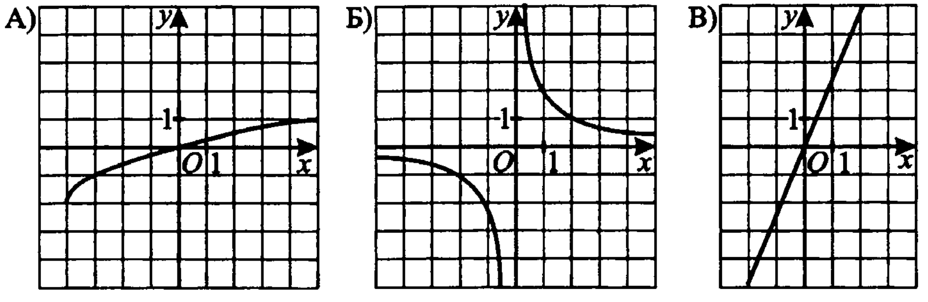


Рис. 63.

1) $y = \frac{5}{2}x$ 2) $y = \frac{2}{x}$

3) $y = \sqrt{x+4} - 2$ 4) $y = \sqrt{x+2} - 4$

Ответ:

А	Б	В

2. На рисунке 64 изображены графики функций $y = 3x + 3$ и $y = x^2 + 4x - 3$. Вычислите координаты точки B.

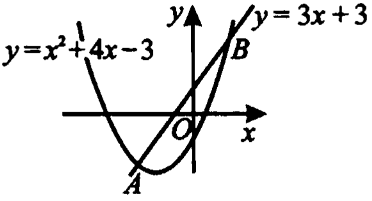


Рис. 64.

Ответ: _____

3. Какой формулой задаётся функция, график которой изображён на рисунке 65?

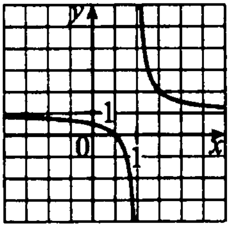


Рис. 65.

1) $y = \dfrac{2}{x-3} + 1$ 2) $y = \dfrac{1}{x-2} + 1$

3) $y = \dfrac{2}{x-1} + 1$ 4) $y = \dfrac{2}{x-2} + 2$

4. На рисунке 66 изображены графики функций $y = x^2 + 5x + 1$ и $y = -x^2 - 3x - 5$. Вычислите координаты точки B.

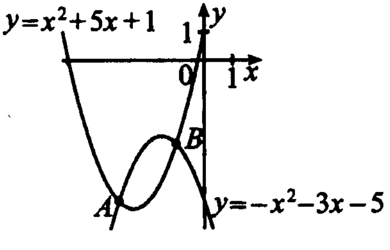


Рис. 66.

Вариант 6

1. Установите соответствие между графиками функций (см. рис. 67) и формулами, которые их задают.

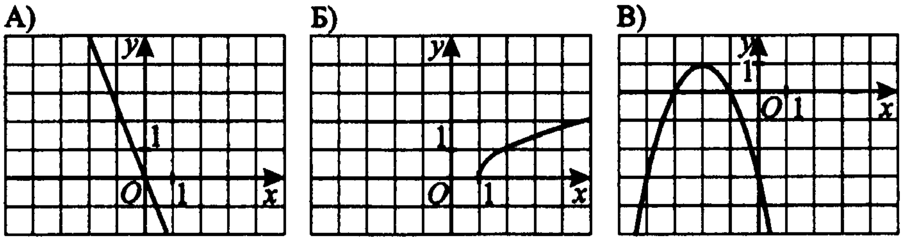


Рис. 67.

1) $y = \sqrt{x-1}$ 2) $y = -(x+2)^2 + 1$

3) $y = -\dfrac{5}{3}$ 4) $y = -\dfrac{5}{2}x$

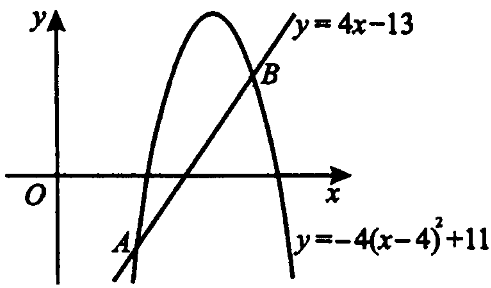


Рис. 68.

Ответ:

А	Б	В

2. На рисунке 68 изображены графики функций $y = 4x - 13$ и $y = -4(x-4)^2 + 11$. Вычислите координаты точки A.

Ответ: _____

3. Установите соответствие между графиками функций (см. рис. 69) и формулами, которые их задают.

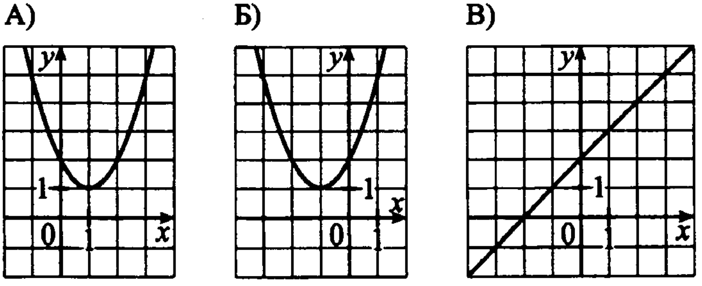


Рис. 69.

1) $y = (x-1)^2 + 1$　　2) $y = x + 1$

3) $y = (x+1)^2 + 1$　　4) $y = x + 2$

Ответ:

А	Б	В

4. На рисунке 70 изображены графики функций $y = x^2 - 3$ и $y = x + 3$. Вычислите координаты точки A.

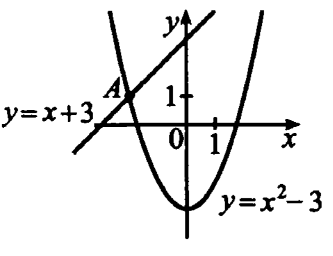


Рис. 70.

Тренировочные тесты

Вариант 1

1. Найдите значение выражения $\frac{1{,}2 \cdot 2{,}8}{4{,}8}$.

1) 7 2) 0,7 3) 0,4 4) 4

2. Найдите область допустимых значений переменной x в выражении $\frac{1}{\sqrt{x+7}}$.

1) $x > 7$ 2) $x \geqslant 7$ 3) $x > -7$ 4) $x \geqslant -7$

3. Найдите два последовательных целых числа, между которыми заключено число $\sqrt{37}$.

4. Найдите корень уравнения $2(3 - 2x) = x - 4$.

5. Упростите выражение $\frac{x}{y} + \frac{y^2 - x^2}{xy}$ и найдите его значение при $x = 200\sqrt{7}$, $y = 300\sqrt{7}$.

6. Решите неравенство $(x-7)(x+7) < -40$, в ответе укажите наименьшее целое решение этого неравенства.

7. Дана арифметическая прогрессия $5,\ 8,\ 11,\ \ldots$. Найдите сумму первых шести её членов.

8. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают (см. рис. 71).

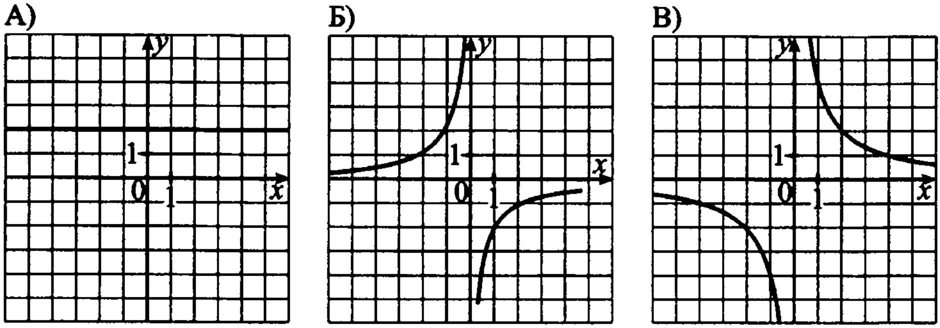


Рис. 71.

1) $y = \dfrac{4}{x}$ 2) $y = -\dfrac{2}{x}$ 3) $y = 2$ 4) $y = 2x$

Ответ:

А	Б	В

9. На рисунке 72 изображены графики функций $y = x^2 - 4$ и $y = 2x + 4$. Найдите координаты точки B.

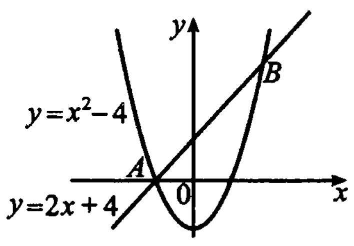


Рис. 72.

10. На координатной прямой отмечены числа a и b (см. рис. 73). Какое из утверждений относительно этих чисел является верным?

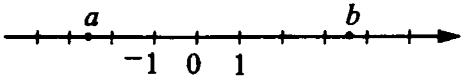


Рис. 73.

1) $b + a < 0$ 3) $5 - a > b$

2) $b + 8a > 0$ 4) $2a - b > 0$

Вариант 2

1. Найдите значение выражения $\frac{20{,}4 \cdot 3{,}5}{10{,}5}$.

1) 4,08 2) 0,68 3) 68 4) 6,8

2. Найдите область допустимых значений переменной a в выражении $\frac{1}{\sqrt{9-a}}$.

1) $a > 9$ 2) $a < 9$ 3) $a \geqslant 9$ 4) $a \leqslant 9$

3. Найдите два последовательных целых числа, между которыми заключено число $\sqrt{29}$.

4. Найдите сумму корней уравнения $3x^2 - 18x = 0$.

5. Упростите выражение $\frac{(a+2b)^2}{ab} - 4 \cdot \frac{a+b}{a}$ и найдите его значение при $a = 150\sqrt{11}$, $b = 200\sqrt{11}$.

6. Решите неравенство $8x + 12 > 2(11 - x)$.

7. Найдите четвёртый член последовательности a_n, если $a_1 = -3$ и $a_{n+1} = a_n + 2$.

8. Какой из графиков на рисунке 74 соответствует формуле $y = \frac{2}{x-1}$?

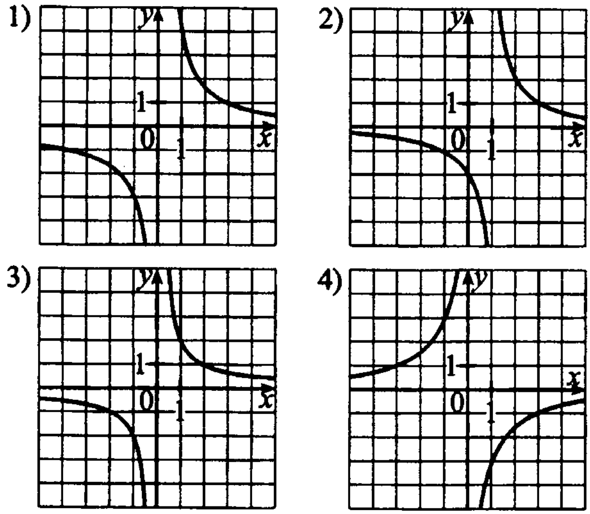


Рис. 74.

9. На рисунке 75 изображены графики функций $y = x - 1$, $y = 4 - x$, $y = 2x + 1$. Найдите координаты точки A.

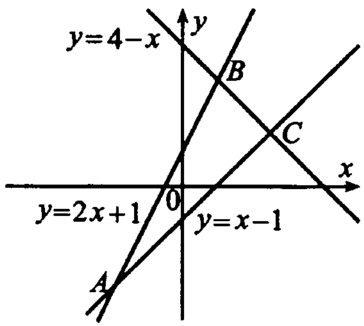


Рис. 75.

10. На координатной прямой отмечены точки M, N, K, L (см. рис. 76). Одна из них соответствует числу $\sqrt{612}$. Какая это точка?

1) M 2) N 3) K 4) L

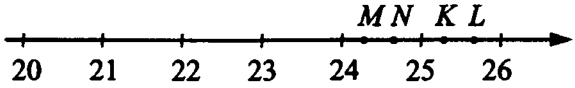


Рис. 76.

Вариант 3

1. Установите соответствие между выражениями и их значениями.

А) $\frac{7}{8}\cdot 1\frac{1}{7}$ Б) $-\frac{4}{5}-\frac{5}{4}$ В) $\frac{2}{5}:\frac{5}{2}$

1) 1 2) 0,16 3) 2,05 4) −2,05

Ответ:

А	Б	В

2. Укажите выражение, тождественно равное выражению $(a-5)(15-b)$.

1) $(b-15)(5-a)$ 2) $(a-5)(b-15)$

3) $-(15-b)(a-5)$ 4) $-(a-15)(5-b)$

3. Внесите множитель под знак корня $(-7\sqrt{5})$.

4. Найдите корни уравнения $(x+6)\sqrt{x+5}=0$.

5. Упростите выражение $\dfrac{b^2-c^2}{c-b}+2b$ и найдите его значение при $b=35+\sqrt{15}$, $c=27+\sqrt{15}$.

6. Найдите количество целых решений неравенства $x^2-15x+50\leqslant 0$.

7. Дана арифметическая прогрессия, в которой $a_6=15$, $a_7=21$. Найдите разность арифметической прогрессии.

8. Укажите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают (см. рис. 77).

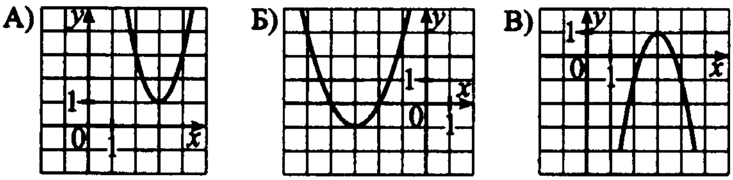


Рис. 77.

1) $y = (x+3)^2 - 1$ 2) $y = 2x^2 - 12x + 19$

3) $y = \dfrac{2}{x}$ 4) $y = -2(x-3)^2 + 1$

Ответ:

А	Б	В

9. На рисунке 78 изображены графики функций $y = x + 1$, $y = x$ и $y = 2x - 1$. Найдите координаты точки B.

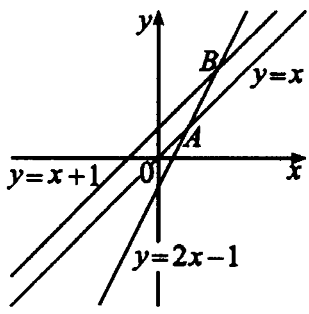


Рис. 78.

10. На координатной прямой отмечены числа a и b (см. рис. 79). Какое из чисел наибольшее?

1) $b + a$ 2) $b - a$ 3) $b + 2$ 4) $3a$

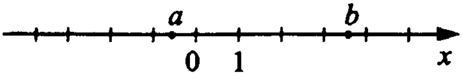


Рис. 79.

Вариант 4

1. Установите соответствие между выражениями и их значениями.

А) $\frac{11}{12} \cdot 1\frac{1}{11}$ Б) $-\frac{5}{12} + \frac{1}{6}$ В) $0{,}2 : 0{,}04$

1) 1 2) 5 3) −0,25 4) 0,5

Ответ:

А	Б	В

2. Укажите выражение, тождественно равное выражению $(7 - x)(8 - y)$.

1) $-(x - 7)(y - 8)$ 2) $-(7 - y)(8 - x)$
3) $-(y - 8)(7 - x)$ 4) $-(x + 7)(8 - y)$

3. Внесите множитель под знак корня $(-5\sqrt{7})$.

4. Решите уравнение $\frac{2x + 7}{3} = \frac{x + 7}{5}$.

5. Упростите выражение $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \cdot \frac{1}{(a + b)^2 - 2ab}$ и найдите его значение при $a = \frac{\sqrt{2}}{6}$, $b = \frac{\sqrt{8}}{5}$.

6. Найдите длину промежутка решений неравенства $(2 - x)(x + 3) \geqslant 0$.

7. Найдите первый член арифметической прогрессии, если $a_8 = 14$, разность $d = 7$.

8. Какая из формул соответствует графику, представленному на рисунке 80?

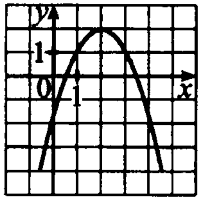


Рис. 80.

1) $y = (x-2)^2 + 2$ 2) $y = \dfrac{4}{x}$

3) $y = -x^2 + 4x - 2$ 4) $y = -x^2 + 2x + 2$

9. На рисунке 81 изображены графики функций $y = x^2$ и $y = -x^2 + 2$. Найдите координаты точки A.

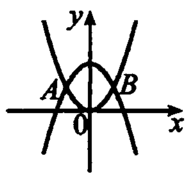


Рис. 81.

10. Решите систему неравенств $\begin{cases} 3x - 2 \geqslant 0, \\ 2x - 10 < 0. \end{cases}$ На какой из координатных прямых изображено множество решений системы (см. рис. 82)?

Вариант 5

1. Относительная высота горы Арарат (расстояние от подножия до вершины) составляет 4 км 365 м. Переведите эту величину в метры.

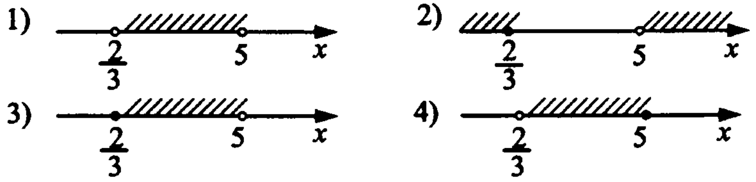


Рис. 82.

1) 4,365 м	2) $4{,}365 \cdot 10^3$ м

3) $40{,}365 \cdot 10^3$ м	4) 400,365 м

2. Сократите дробь $\dfrac{(a^2)^3 \cdot b^6}{b^2}$.

1) a^5b^3	2) a^6b^3	3) a^5b^4	4) a^6b^4

3. На координатной прямой отмечены точки A, B, C, D (см. рис. 83). Одна из них соответствует числу $\sqrt{115}$. Какая это точка?

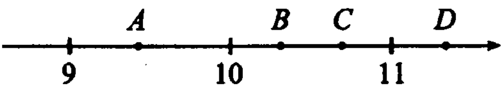


Рис. 83.

1) A	2) B	3) C	4) D

4. Решите уравнение $x^2 - 2x - 3 = 0$. В ответе укажите его наибольший корень.

5. Упростите выражение $\left(\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x}\right) \cdot \dfrac{xy}{x-y}$ и найдите его значение при $x = 3 - \sqrt{7}$, $y = 7 + \sqrt{7}$.

6. Решите неравенство $11 + 7(3 - x) \leqslant -3(4 + x)$, в ответе укажите наименьшее целое решение неравенства.

7. Задана арифметическая прогрессия $39,\ 3x,\ 69,\ \dots$. Найдите x.

8. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают (см. рис. 84).

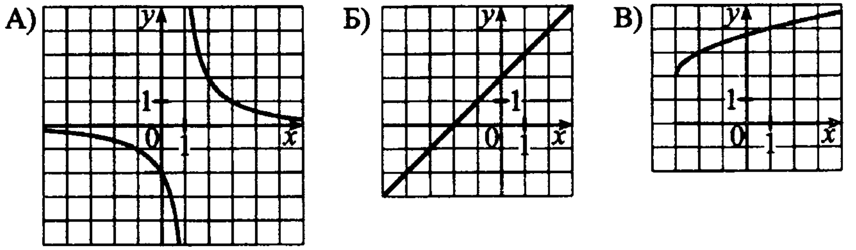


Рис. 84.

1) $y = x + 2$

2) $y = \sqrt{x+3} + 2$

3) $y = \sqrt{x-3} + 2$

4) $y = \dfrac{2}{x-1}$

Ответ:

А	Б	В

9. На рисунке 85 изображены графики функций $y = 2x$ и $y = \dfrac{8}{x}$. Найдите координаты точки A.

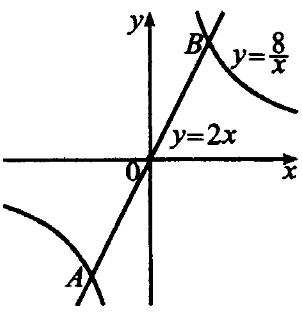


Рис. 85.

10. Решите систему неравенств $\begin{cases} 3x+7 \leqslant 0, \\ 2x+8 < 0. \end{cases}$ На какой из координатных прямых изображено множество решений системы (см. рис. 86)?

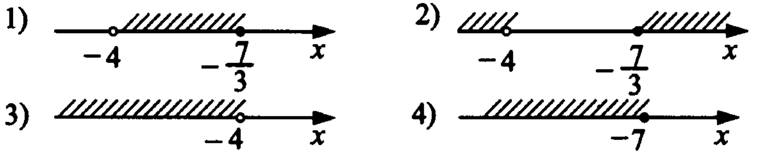


Рис. 86.

Вариант 6

1. В таблице приведены объёмы воды в четырёх прудах.

Пруд	1	2	3	4
Объём (л)	$8{,}7 \cdot 10^7$	$1{,}2 \cdot 10^8$	$3{,}6 \cdot 10^9$	$2{,}3 \cdot 10^8$

В каком из них количество воды наименьшее?

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

2. Сократите дробь $\dfrac{x^{10} \cdot (y^2)^4}{x^2}$.

1) x^5y^6 2) x^8y^8 3) x^5y^8 4) x^8y^6

3. На координатной прямой отмечены точки M, N, K, E (см. рис. 87). Одна из них соответствует числу $\sqrt{610}$. Какая это точка?

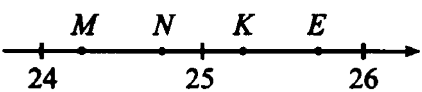


Рис. 87.

1) M 2) N 3) K 4) E

9. Зак. № 181

4. Решите уравнение $\dfrac{2x-5}{2}=\dfrac{8-5x}{4}$.

5. Упростите выражение $\left(\dfrac{a}{b}+a\right)\cdot\dfrac{ab^2}{ab+a}$ и найдите его значение при $a=3\sqrt{3}$, $b=2\sqrt{12}$.

6. Решите неравенство $(x-7)(x+6)<0$. В ответе укажите наименьшее целое число, являющееся решением неравенства.

7. Дана геометрическая прогрессия $2,\ -6,\ 18,\ \ldots$. Найдите пятый член прогрессии.

8. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают (см. рис. 88).

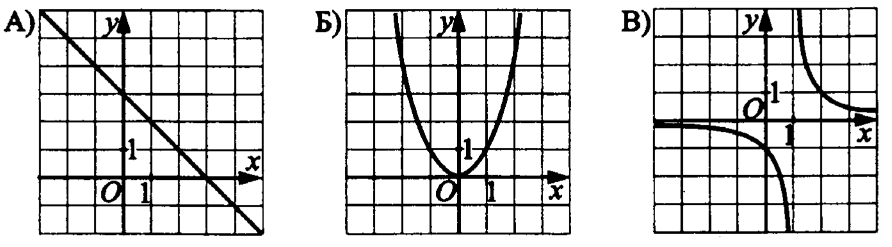


Рис. 88.

1) $y=\dfrac{2}{x}$ 2) $y=-x+3$ 3) $y=\dfrac{1}{x-1}$ 4) $y=x^2$

Ответ:

А	Б	В

9. На рисунке 89 изображены графики функций $y = x^2 - 9$ и $y = 3x - 5$. Вычислите координаты точки A.

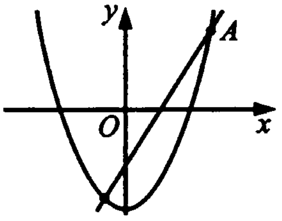


Рис. 89.

10. Решению какого из представленных неравенств соответствует рисунок 90?

Рис. 90.

1) $(x+3)(x-2) > 0$

2) $(x-3)(x+2) \geqslant 0$

3) $\dfrac{x-3}{x+2} > 0$

4) $\dfrac{x+2}{x-3} \geqslant 0$

Вариант 7

1. Укажите выражение, значение которого является наибольшим.

1) $\dfrac{0{,}4}{0{,}2} - 2$

2) $\dfrac{23{,}8 - 5}{0{,}4}$

3) $\dfrac{7{,}7}{0{,}9} : \dfrac{1}{27}$

4) $-0{,}1 + 5 : \dfrac{5}{6}$

2. Среди приведённых ниже равенств укажите тождественно верное.

1) $(a+b^2)^2 = a^2 + b^4$

2) $c^2 - d^4 = (d^2 + c)(c - d^2)$

3) $(x^2 - y)^2 = x^4 - 2x^2y - y^2$

4) $p^4 - q^2 = (p^2 + q)(p - q)$

3. Вычислите $\sqrt{3\frac{2}{9}} \cdot \sqrt{2\frac{23}{29}}$.

4. Найдите корень уравнения $9 - x = 1 + 2(7 - x)$.

5. Упростите выражение $\dfrac{(2x-y)^2}{x} + 4(y - x)$ и найдите его значение при $x = 4$, $y = 6\sqrt{3}$.

6. Решите неравенство $x^2 - 3x + 4 < 0$. В ответе укажите количество целочисленных решений этого неравенства.

7. В геометрической прогрессии $b_1 = -16$, знаменатель $q = -\frac{1}{2}$. Найдите четвёртый член этой прогрессии.

8. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают (см.рис. 91).

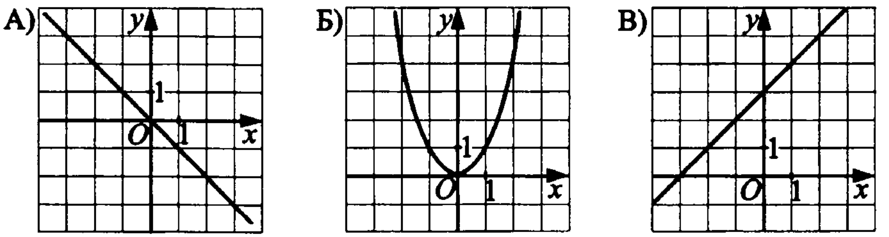


Рис. 91.

Ответ:

А	Б	В

9. На рисунке 92 изображены графики функций $y = x^2$, $y = -x + 2$, $y = x + 6$. Вычислите координаты точки A.

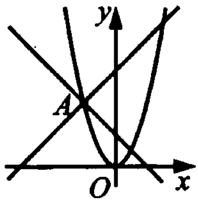


Рис. 92.

10. Решите систему неравенств $\begin{cases} 9x + 27 \geqslant 0, \\ 2x - 8 < 0. \end{cases}$ На какой из координатных прямых изображено множество решений системы (см. рис. 93)?

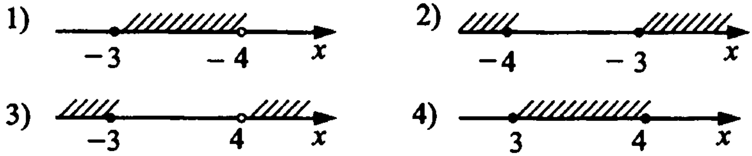


Рис. 93.

Вариант 8

1. Укажите выражение, значение которого является наибольшим.

1) $-4 + 11 : \dfrac{11}{17}$

2) $\dfrac{12{,}4 - 11}{0{,}7}$

3) $-\dfrac{8{,}8}{0{,}3} : \dfrac{1}{6}$

4) $\dfrac{0{,}3}{0{,}2} - 11$

2. Среди приведённых ниже равенств укажите тождественно верное.

1) $(a^2+b)^2 = a^4 + b^2$

2) $c^2 - d^4 = (d^2+c)(d^2-c)$

3) $(x^2-y)^2 = y^2 - 2yx^2 + x^4$

4) $p^4 - q^2 = (p^2-q)^2$

3. Вычислите $\sqrt{3\frac{5}{9} \cdot 4{,}5}$.

4. Найдите сумму корней уравнения $x^2 - 7x + 8 = 0$.

5. Упростите выражение $\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2} \cdot (y-x)$ и найдите его значение при $x = 4+\sqrt{5}$, $y = 6-\sqrt{5}$.

6. Найдите наименьшее целое решение неравенства
$\dfrac{x-3}{x+5} \geqslant 2$.

7. Найдите первый член геометрической прогрессии, если $b_5 = 162$, $q = 3$.

8. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают (см. рис. 94).

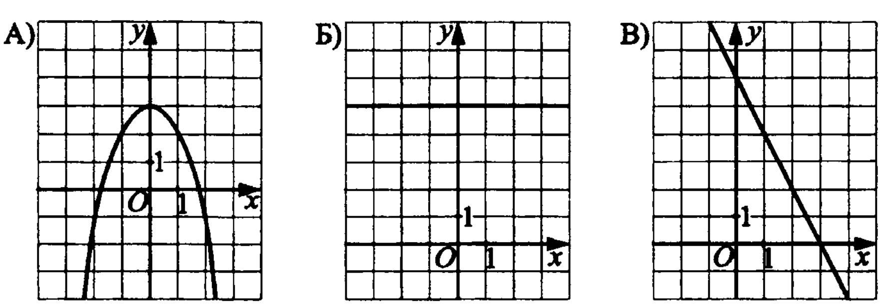


Рис. 94.

1) $y = -\dfrac{5}{x}$ 2) $y = -x^2 + 3$ 3) $y = -2x + 6$ 4) $y = 5$

Ответ:

А	Б	В

9. На рисунке 95 изображены графики функций $y = x^2 + 1$, $y = 2x$, $y = -x + 3$. Вычислите координаты точки A.

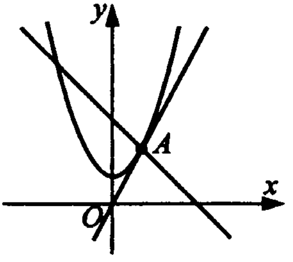


Рис. 95.

10. Решению какой из представленных систем неравенств соответствует рисунок 96?

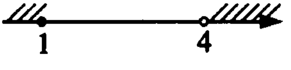


Рис. 96.

1) $\begin{cases} x > 4, \\ x \leqslant 1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} (x-1)(x-4) \geqslant 0, \\ \dfrac{1}{(x-4)^2} > 0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x-1)(x-4)^2 < 0, \\ (x-4)^2(x-1) > 0. \end{cases}$

4) $\begin{cases} x \leqslant 4, \\ x > 1. \end{cases}$

Вариант 9

1. Найдите значение выражения $\left(4\frac{2}{3} - \frac{3}{7}\right) \cdot 2{,}625 : 9\frac{8}{9}$.

1) $11{,}25$ 2) $10\frac{1}{8}$ 3) $\frac{3}{8}$ 4) $1{,}125$

2. На координатной прямой отмечено число a (см. рис. 97).

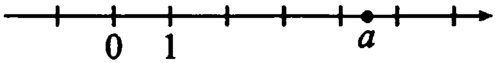


Рис. 97.

Какое из утверждений относительно этого числа является верным?

1) $a - 4 < 0$ 2) $6 - a < 0$ 3) $a - 3 > 0$ 4) $a - 7 > 0$

3. Найдите значение выражения $\frac{(2\sqrt{10})^2}{25}$.

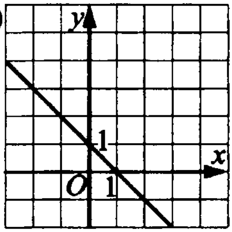
4. Решите уравнение $\frac{2x+7}{3} = 5$.

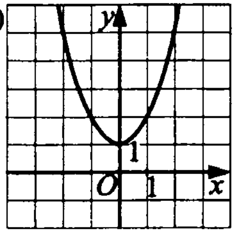
5. Упростите выражение $\frac{(a+3b)^2 - (3b-a)^2}{a}$ и найдите его значение при $a = 14 + \sqrt{3}$, $b = 5$.

6. Решите неравенство $x^2 + 3x - 4 < 0$. В ответе укажите наименьшее целое решение неравенства.

7. Дана геометрическая прогрессия $5, 15, 45, \ldots$. Найдите сумму первых шести её членов.

8. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают (см.рис. 98).

А) 

Б) 

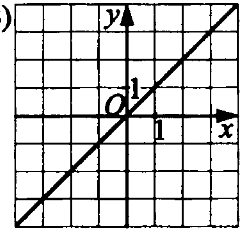
В) 

Рис. 98.

1) $y = 1 - x$ 2) $y = x^2 + 1$ 3) $y = \dfrac{2}{x}$ 4) $y = x$

Ответ:

А	Б	В

9. На рисунке 99 изображены графики функций $y = -3$ и $y = x^2 - 2x - 3$. Вычислите координаты точки A.

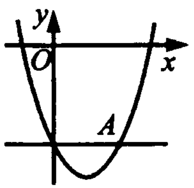


Рис. 99.

10. Какое из указанных чисел является рациональным?

1) $\dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{7}} \cdot \sqrt{8}$

2) $\dfrac{\sqrt{44}}{\sqrt{22}}$

3) $(\sqrt{7} - \sqrt{3})(\sqrt{7} - 1)$

4) $(5 + \sqrt{2})^2$

Вариант 10

1. Найдите значение выражения $(3{,}2 + 8{,}4) : 1\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{25}$.

1) 2,9 2) 7,25 3) 0,29 4) 0,7424

2. На координатной прямой отмечено число b (см. рис. 100).

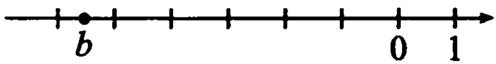


Рис. 100.

Какое из утверждений относительно этого числа является верным?

1) $4 - b > 0$ 2) $b + 5 > 0$ 3) $b + 7 < 0$ 4) $8 - b < 0$

3. Найдите значение выражения $\frac{42}{(5\sqrt{6})^2}$.

4. Решите уравнение $-x^2 - 2x + 3 = 0$.

5. Упростите выражение $\frac{1}{c^2 + d^2} \cdot \left(\frac{c+d}{c-d} + \frac{c-d}{c+d}\right)$ и найдите его значение при $c = \sqrt{17}$, $d = \sqrt{12}$.

6. Решите неравенство $2(7 - 5x) > 12(x + 1) - 7$. В ответе укажите наибольшее целое решение неравенства.

7. В геометрической прогрессии $b_3 = 3$, $b_5 = \frac{1}{3}$. Найдите b_4, если известно, что знаменатель q положителен.

8. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают (см.рис. 101).

1) $y = (x - 3)(x - 1)$ 2) $y = |x|$

3) $y = -\frac{3}{4}x + 3$ 4) $y = 4x + 3$

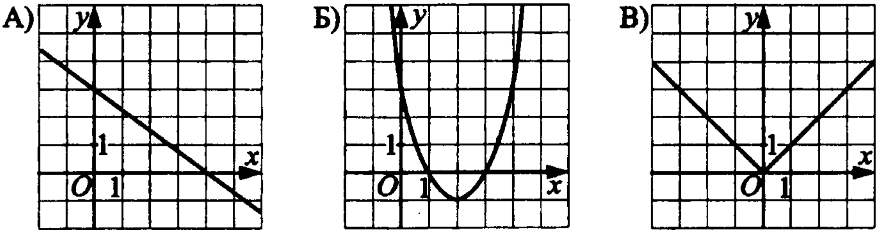


Рис. 101.

Ответ:	А	Б	В

9. На рисунке 102 изображены графики функций $y = x + 5$ и $y = (x - 1)^2$. Вычислите координаты точки A.

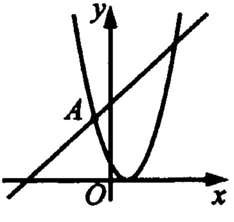


Рис. 102.

10. Какое из указанных чисел является рациональным?

1) $(\sqrt{28} - \sqrt{3})(\sqrt{28} + 3)$

2) $(\sqrt{49} - \sqrt{16})^2$

3) $(\sqrt{32} - 1)^2$

4) $\dfrac{5}{\sqrt{6}} + \dfrac{13}{\sqrt{7}}$

Ответы к вариантам для самостоятельного решения

Глава 1. Числа и вычисления

№	1	2	3	4	5	6	7
Вар. 1	11,447	$-\frac{7}{15}$	9	$7{,}377 \cdot 10^5$	38,1	5,09	3
Вар. 2	0,1	$-0{,}25$	$2\sqrt{3}$	$1{,}426 \cdot 10^5$	70,285	2,4	2
Вар. 3	10,253	$-9\frac{13}{70}$	2	$3 \cdot 10^4$	30,88	0,95	4
Вар. 4	14,599	110,08	1,5	$1{,}7 \cdot 10^5$	2,185	$-19{,}6$	3
Вар. 5	0	$\frac{2}{3}$	9	$2{,}53 \cdot 10^3$	70,285	19,7	3
Вар. 6	20	5,8	2	$2 \cdot 10^5$	18,25	19,6	4

Глава 2. Алгебраические выражения

№	1	2	3	4	5
Вар. 1	3	$\frac{ac}{2}$	$x \geqslant 2$	2	3
Вар. 2	4	$\frac{n}{5m}$	$m \neq 2$	$(a-b)^2$	3
Вар. 3	-10	$9a^2$	$x \geqslant 4$	$\frac{(3x+y)^2}{3}$	2
Вар. 4	-11	$\frac{3}{b^9}$	$x \neq 2$, $x \neq 3$	27,5	1
Вар. 5	-6	$\frac{2a^2b^2}{3}$	$a \leqslant 3$	11	3
Вар. 6	20	$\frac{3}{2y}$	$x > -5$	5	1

Глава 3. Уравнения и неравенства

№	1	2	3	4	5	6
Вар. 1	2	0,5	2	3	9	4
Вар. 2	−1	−2	4	6	3	4
Вар. 3	−10	−5	−8	3	13	4
Вар. 4	−16	2,5	1	4	2	3
Вар. 5	−5	−1,8	4	4	2	8
Вар. 6	−3	9	−15	−4	2	4

Глава 4. Числовые последовательности

№	1	2	3
Вар. 1	36	−65	728
Вар. 2	84	3	5
Вар. 3	3	−61	−2
Вар. 4	−100	96	0,5
Вар. 5	14	129	$5n-3$
Вар. 6	−78	605	±96

Глава 5. Графики и функции

№	1	2	3	4
Вар. 1	413	(−2; −1)	432	(2; −2)
Вар. 2	241	(2; 3)	3	(−0,5; −2)
Вар. 3	314	(−1; −4)	3	(3; 1)
Вар. 4	423	(4; 0)	213	(−2; −3)
Вар. 5	321	(2; 9)	2	(−1; −3)
Вар. 6	412	(2; −5)	134	(−2; 1)

Ответы к тренировочным тестам

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Вар. 1	2	3	6 и 7	2	1,5	-2	75	321	$(4; 12)$	3
Вар. 2	4	2	5 и 6	6	0,75	$(1; +\infty)$	3	2	$(-2; -3)$	2
Вар. 3	142	1	$-\sqrt{245}$	-5	8	6	6	214	$(2; 3)$	3
Вар. 4	132	3	$-\sqrt{175}$	-2	7,5	5	-35	3	$(-1; 1)$	3
Вар. 5	2	4	3	3	10	11	18	412	$(-2; -4)$	3
Вар. 6	1	2	2	2	36	-5	162	243	$(4; 7)$	4
Вар. 7	3	2	3	6	27	0	2	214	$(-2; 4)$	1
Вар. 8	1	3	4	7	-10	-13	2	243	$(1; 2)$	2
Вар. 9	4	3	1,6	4	60	-3	1820	124	$(2; -3)$	1
Вар. 10	3	1	0,28	$-3; 1$	0,4	0	1	312	$(-1; 4)$	2

ГИА-9

Учебное издание

Иванов Сергей Олегович
Ольховая Людмила Сергеевна
Резникова Нина Михайловна
Нужа Галина Леонтьевна

МАТЕМАТИКА. БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ ГИА-2014. ПОСОБИЕ ДЛЯ «ЧАЙНИКОВ». МОДУЛЬ 1: АЛГЕБРА

Налоговая льгота: издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Обложка *В. Кириченко*
Компьютерная верстка *О. Сапожников*
Корректор *Н. Пимонова*

Подписано в печать с оригинал-макета 05.08.2013.
Формат 60x84 1/16. Бумага типографская.
Гарнитура Ньютон. Печать офсетная. Усл. печ. л. 8,5.

Доп. тираж 10 000. Заказ № 227.

Издательство ООО «Легион» включено в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, которые допускаются к использованию в образовательном процессе в имеющих государственную аккредитацию и реализующих образовательные программы общего образования образовательных учреждениях. Приказ Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009, зарегистрирован в Минюст России 15.01.2010 № 15987.

ООО «ЛЕГИОН»
Для писем: 344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550.
Адрес редакции: 344011, г. Ростов-на-Дону, пер. Доломановский, 55.
www.legionr.ru e-mail: legionrus@legionrus.com

Отпечатано в соответствии с качеством предоставленных диапозитивов в ЗАО «Полиграфобъединение»
347900, г. Таганрог, ул. Лесная биржа, 6В.